Differentialgeometrie - 150 Jahre nach den "Disquisitiones generales circa superficies curvas" von Carl Friedrich Gauß

Dombrowski, Peter

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 27, 1977, S.63-102

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Differentialgeometrie – 150 Jahre nach den „Disquisitiones generales circa superficies curvas" von Carl Friedrich Gauß *

Von **Peter Dombrowski**

Diese Tage in Braunschweig stehen im Zeichen des Gedenkens an den Geburtstag von Carl-Friedrich Gauß vor 200 Jahren am 30. April 1777. Für die Differentialgeometrie bietet das Jahr 1977 darüber hinaus auch Anlaß zu einem wissenschaftlichen Gauß-Jubiläum:

Vor 150 Jahren, am 8. Oktober 1827, überreichte Gauß der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen seine (als „Vorlesung" deklarierte) Arbeit

„Disquisitiones generales circa superficies curvas", (1)

ein Ereignis, das – ohne Übertreibung – als Geburtstag der „Inneren (= intrinsecen) Differentialgeometrie" bezeichnet werden kann.

P. Stäckel hat im Rahmen seines lesenswerten, ausgezeichneten Artikels „Gauß als Geometer" (vgl. [24]) auch eine Würdigung von Gauß' Arbeiten zur Differentialgeometrie der krummen Flächen gegeben und hat in diesem Zusammenhang (vgl. [24], S. 87, Zeile 18) von dem „Gebäude der Disquisitiones generales" gesprochen. Dies Zitat und viele ähnliche Zeugnisse der nachfolgenden differentialgeometrischen Literatur haben bei vielen Nichtkennern der (in Latein verfaßten) Originalarbeit den Eindruck entstehen lassen, es handele sich hier in Bezug auf Ideenreichtum, rechnerische Leistung und Umfang um ein ähnlich monumentales Werk wie die Jugendschrift von Gauß, die „Disquisitiones Arithmeticae". Die äußeren Fakten indes rechtfertigen eine solche Einschätzung wohl kaum: Im Vergleich zu den 470 Druckseiten der „Disquisitiones Arithmeticea" (vgl. G.W. 1, S. 1–474) nehmen sich die nur 40 Druckseiten der „Disquisitiones generales" (1) (vgl. G.W. 4, S. 219–258) recht bescheiden aus. Auch der inhaltliche Umfang gestattet eine knappe, vollständige Aufzählung: Die Disquisitiones generales enthalten etwa fünf wesentliche neue Begriffe (s.u. (7), (8), (9), (26), (28)), etwa zehn neue Sätze (s.u. (10) u. (11), (12), (14), (15), (22), (27), (32), (34), (35), (36)) sowie eine programmatische Erklärung zur „Inneren Differentialgeometrie" (s.u. (18)). Um so eindrucksvoller ist es, bei einem Rückblick feststellen zu müssen, welchen fundamentalen Einfluß die „Disquisitiones generales" auf die Entwicklung neuer Ideen, auf die Zielvorstellungen sowie auf die Art der Resultate in der Differen-

* Diese Niederschrift enthält gegenüber dem (nur als einem Referat angelegt gewesenen) mündlichen Vortrag eine ausführlichere Dokumentation insbesondere über Inhalt und Geschichte der „Disquisitiones generales" mit genauen Quellen-Belegen und mehreren eingefügten Original-Zitaten.

tialgeometrie der letzten 150 Jahre gehabt haben. Eine solche Rückschau (zumal eine aus Anlaß eines Jubiläums!) mag leicht dazu neigen, in solche „ehrwürdige" Arbeiten im nachhinein mehr Substanz bzw. prophetischen Weitblick hineinzulesen, als vom Autor selbst intendiert wurde bzw. zu seiner Zeit überhaupt gesehen werden konnte. Um dieser Gefahr zu entgehen, geben wir zunächst ein vollständiges, dem Manuskript inhaltlich eng angelehntes, aber in freier Übersetzung (d.h. in heutiger Nomenklatur) abgefaßtes

Referat über den Inhalt der „Disquisitiones generales"

(die in 29 Artikeln aufgegliedert sind), und wir werden dabei an einigen wesentlichen Stellen Gauß wörtlich zitieren.

(i) Die Artikel 1 bis 3 (vgl. G.W. 4, S. 219–222) sind ein elementarer „Vorspann", der lediglich Bezeichnungskonventionen und (i. w. bekannte) Resultate zur sphärischen Trigonometrie zusammenstellt.

Im Einzelnen: Art. 1 fixiert die Bezeichnungsweise von Punkten der

$$\textit{Einheitssphäre}\; S^2 := \{a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{E}^3 \mid \langle a, a\rangle = 1\}^{1)} \tag{1}$$

und der kanonischen Basisvektoren (1, 0, 0,), (0, 1, 0), (0, 0, 1) des $\mathbb{E}^3$ (als „(1)", „(2)", „(3)"). – In Art. 2 werden Winkel zwischen Geraden und Geraden, Ebenen und Ebenen, sowie Geraden und Ebenen des $\mathbb{E}^3$ mittels Längen von Großkreisbögen bzw. mittels Winkeln zwischen Großkreisen von S^2 definiert, und es wird die folgende Identität gezeigt[1]):

$$\langle a \times b, \tilde{a} \times \tilde{b}\rangle = \langle a, \tilde{a}\rangle\langle b, \tilde{b}\rangle - \langle a, \tilde{b}\rangle\langle b, \tilde{a}\rangle \quad \textit{für}\; a, b, \tilde{a}, \tilde{b} \in S^2. \tag{2}$$

Für $a \neq \pm b$ und $a \neq \pm \tilde{b}$ wird (2) interpretiert als Formel zur Berechnung des Winkels zwischen den Großkreisbögen (a, b) bzw. $(\tilde{a}, \tilde{b})$ auf S^2. Zu (2) bemerkt Gauß im Vorentwurf für die Disquisitiones generales (vgl. G.W. 8, S. 416, Z. 5 v.u.): „Wir fügen noch ein anderes Theorem bei, welches unseres Wissens sonst nirgends vorkommt und öfters mit Nutzen gebraucht werden kann", (vgl. auch G.W. 4, S. 342, Z. 9/10). [Anm. des Verf. -s: (2) wird heute meist als „Lagrange'sche Identität" bezeichnet. Die als Beleg dafür gewöhnlich zitierte Arbeit von Lagrange (vgl. [16]) enthält jedoch die Formel (2) nicht explizit, sondern zeigt (vgl. [16], S. 580, Z. 6 v. u. bzw. S. 581, Z. 12) nur:

$$\langle a_1 \times a_2, a_3\rangle^2 = \det(\langle a_i, a_j\rangle)_{i,j=1,2,3} \quad \textit{für}\; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{E}^3,$$

bzw. als Spezialfall hiervon $(a_3 := a_1 \times a_2)$:

$$\langle a \times b, a \times b\rangle = \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle - \langle a, b\rangle^2 \quad \textit{für}\; a, b \in \mathbb{E}^3,$$

woraus sich allerdings die Gleichung (2) durch eine gewisse Polarisierung herleiten läßt.]

Für ein Kürzesten-Dreieck auf S^2 mit den Ecken $a, b, c \in S^2$, den Winkeln α, β, γ und den Seiten a, b, c wird ferner die Grundformel der sphärischen Trigonometrie

1) Hier wie im folgenden bezeichnen wir – wie heute üblich – mit $\langle \ldots, \ldots \rangle$ bzw. $\ldots \times \ldots$ das kanonische innere bzw. Vektor-Produkt in $\mathbb{E}^3$.

$$(\sin\alpha)(\sin b)(\sin c) = (\sin\beta)(\sin a)(\sin c) = (\sin\gamma)(\sin a)(\sin b) = \pm|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\times\mathbf{c}\rangle|$$

hergeleitet und die (von der Reihenfolge der Ecken **a, b, c** unabhängige!) ganz rechts stehende „Determinante“ als das 6-fache Volumen des von **o, a, b, c** aufgespannten Tetraeders interpretiert.

Art. 3 erklärt „Glattheit“[2]) einer Fläche M des $\mathbb{E}^3$ in einem Punkte $A \in M$ durch die Existenz einer Ebene durch A (der Tangentialebene $T_A M$), die die Grenzlagen aller Geraden $\overline{AB}$ mit $B \in M\setminus\{A\}$ für $B \longrightarrow A$ enthält.

(ii) In Artikel 4 und 5 (G.W. 4, S. 222–225) werden für spezielle Präsentationsweisen gewisser orientierbarer Flächen M des $\mathbb{E}^3$ Normalenvektoren berechnet und ein Einheitsnormalenfeld auf M (und damit eine Orientierung in M, der Verf.) ausgezeichnet, genauer: Ist

M *eine Niveaufläche einer differenzierbaren Funktion* $\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}$ (3)
(wobei U offen in $\mathbb{E}^3$ und $d_A\varphi \neq 0$ für $A \in M$),

bzw.

M *das Bild einer Immersion* $f: U \longrightarrow \mathbb{E}^3$ (4)
(wobei U offen in der (u, v)-Ebene $\mathbb{R}^2$),

bzw.

M *der Graph einer Funktion* $z(x, y): U \longrightarrow \mathbb{R}$ in $\mathbb{E}^3$, (U offen in $\mathbb{R}^2$), (5)

so wird das *„äußere Einheitsnormalenfeld“* beziehungsweise definiert als positiv-proportional zu

$$\operatorname{grad}\varphi|_M, \quad f_u \times f_v, \quad (-z_x, -z_y, 1). \tag{6}$$

(iii) Artikel 6 führt die folgenden drei zentralen, wesentlich neuen Begriffe dieser Arbeit ein:

a) Für eine Fläche M des $\mathbb{E}^3$ mit einem stetigen Einheitsnormalenfeld wird (in heute wohlbekannter Weise) die

Abb., durch parallele Normalen $\zeta: M \longrightarrow S^2$ *(„Gauß' sphärische Abb.“)* (7)

von M in die Einheitssphäre S^2 (vgl. (1)) definiert (vgl. G.W. 4, S. 226, Z. 1–4).

Die Idee zur Einführung dieser Abbildung wird erhellt durch folgende Bemerkung von Gauß dazu an anderer Stelle (vgl. G.W. 4, S. 342, Z. 6): „Dies Verfahren kommt im Grunde mit demjenigen überein, welches in der Astronomie in stetem Gebrauch ist, wo man alle Richtungen auf eine fingierte Himmelskugel von unendlich großem Halbmesser bezieht“, bzw. durch folgende, mehrfach von Gauß verwendete Redeweise, wenn der Bildpunkt $\zeta(A) \in S^2$ eines Flächenpunktes $A \in M$ unter der Abbildung (7) von ihm als „Zenithpunkt“ von A bezeichnet wird (vgl. G.W. 8, S. 436, Z. 5, 7, 20, 23).

b) Es folgt eine vorläufige Definition (des absoluten Betrages) der *„Totalkrümmung“* (= *„curvatura totalis“* oder *„curvatura integra“*, vgl. G.W. 4, S. 226, Z. 11) einer kompakten Teilmenge D einer Fläche M des $\mathbb{E}^3$ als Flächeninhalt area$(\zeta(D))$ ihres sphärischen Bildes $\zeta(D)$ in S^2 (vgl. (7) und G.W. 4, S. 226, Z. 10).

[2]) bei Gauß: „stetige Gekrümmtheit“ statt „Glattheit“.

c) Dann folgt die Definition für das *„Krümmungsmaß“* (= *„mensura curvaturae“*, vgl. G.W. 4, S. 226, Z. 14) K(A) in einem Punkte A einer Fläche M des $\mathbb{E}^3$, die heute sogenannte

Gauß'sche Krümmung K(A) *von* M *im Punkte* $A \in M$, *als* (vgl. b)):

$$|K(A)| := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{area}(\zeta(D_\varepsilon))}{\operatorname{area}(D_\varepsilon)} \tag{8}$$

(wobei D_ε die kompakte ε-Nachbarschaft von A in M ist), mit einer topologischen[3]) Festlegung des Vorzeichens von K(A), nämlich: Ist $|K(A)| \neq 0$, so ist K(A) positiv bzw. negativ festgelegt, je nachdem (in heutiger Terminologie) das Differential von ζ in A, gefolgt von der Translation τ des $\mathbb{E}^3$, die ζ(A) in A zurückführt, eine orientierungstreue bzw. nicht-orientierungstreue lineare Abbildung $\tau \circ \zeta_*|_A : T_AM \longrightarrow T_AM$ der Tangentialebene von M in A ist. Diese Orientierungstreue wird von Gauß erklärt, und zwar einmal durch die Schnittzahl-Treue von ζ auf Paaren zueinander transversaler Kurven der Fläche M durch A (vgl. G.W. 4, S. 226, Z. 7 v. u.) bzw. durch die Eigenschaft von ζ, den Umlaufssinn von ∂D_ε um D_ε ("D_ε links von ∂D_ε, vgl. (8)) in den gleichen Umlaufssinn von $\zeta(\partial D_\varepsilon)$ um $\zeta(D_\varepsilon)$ überzuführen (vgl. G.W. 8, S. 425, Z. 11 v. u.).

d) Mithilfe der Gauß'schen Krümmung wird dann für eine beliebige kompakte Teilmenge D einer orientierten Fläche M des $\mathbb{E}^3$ die (mit einem Vorzeichen versehene) Totalkrümmung von D definiert:

$$\textit{Totalkrümmung}\,(D)\ (= \text{„}\textit{curvatura integra}\text{“ } \textit{von}\ D) := \int_D K\,d\sigma, \tag{9}$$

wobei dσ das Flächenelement der orientierten Fläche M ist.

(iv) Die Artikel 7, 8, 9, 10 (vgl. G.W. 4, S. 228–234) enthalten Formeln zur Berechnung sowie die bekannte „äußere“ (= extrinsece) Interpretation (von Betrag und Vorzeichen) der Gauß'schen Krümmung K einer Fläche M in $\mathbb{E}^3$. Genauer, ist M gegeben durch (5) bzw. (3) bzw. (4), so beweist Gauß:

$$(1 + z_x^2 + z_y^2)^2 K = z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2, \tag{10}$$

bzw.

$$\boxed{\begin{aligned}(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)^2K &= (\varphi_{yy}\varphi_{zz}-\varphi_{yz}^2)\,\varphi_x^2 + (\varphi_{xx}\varphi_{zz}-\varphi_{xz}^2)\,\varphi_y^2 + (\varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi_{xy}^2)\,\varphi_z^2 - \\ &\quad -2\left(\begin{vmatrix}\varphi_{xy} & \varphi_{xz}\\ \varphi_{zy} & \varphi_{zz}\end{vmatrix}\varphi_x\varphi_y + \begin{vmatrix}\varphi_{yz} & \varphi_{yx}\\ \varphi_{xz} & \varphi_{xx}\end{vmatrix}\varphi_y\varphi_z + \begin{vmatrix}\varphi_{xz} & \varphi_{xy}\\ \varphi_{yz} & \varphi_{yy}\end{vmatrix}\varphi_x\varphi_z\right)\\ &\text{bzw.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (11)\\ \|f_u\times f_v\|^4K &= \langle f_u\times f_v, f_{uu}\rangle\langle f_u\times f_v, f_{vv}\rangle - \langle f_u\times f_v, f_{uv}\rangle^2,\end{aligned}}$$

(vgl. G.W. 4, S. 230, Z. 7 bzw. S. 232, Z. 5 v. u. bzw. S. 234, Z. 4 v. u.).

[3]) Die geometrische Deutung von $K(A) > 0$ bzw. < 0 als „buckel-“ bzw. „sattel-förmige“ Gekrümmtheit von M in A wird erst viel später gegeben (s. u. (12)) und ist nicht Bestandteil der Definition von K(A)!

Aus (10) wird (vgl. G.W. 4, S. 231) die Folgerung gezogen:

Satz: *Für jeden Punkt* A *einer Fläche* M *des* $\mathbb{E}^3$ *gilt* $K(A) = \varkappa_1\varkappa_2$, *wobei* $\varkappa_1, \varkappa_2$ *die Extremalwerte der (orientierten) Krümmungen aller derjenigen ebenen Kurven in* A *sind, die als Schnitte von* M *mit Ebenen durch die Flächennormale von* M *in* A *auftreten,* und $K(A) > 0$ bzw. < 0, wenn M in A „konvex-konvex“ oder „konkav-konkav“ (d.h. „buckelförmig“) bzw. „konkav-konvex“ (d.h. sattelförmig) gekrümmt ist.

(v) Der Artikel 11 enthält das zentrale Formel-Resultat der gesamten „Disquisitiones generales“: Ist die Fläche M in der Gestalt (4) gegeben, so folgt (mit den von Gauß eingeführten) Abkürzungen:

$$E := \langle f_u, f_u \rangle, \quad F := \langle f_u, f_v \rangle, \quad G := \langle f_v, f_v \rangle \tag{13}$$

die (vgl. G.W. 4, S. 236) heute so genannte

Gauß-Gleichung:

$$\boxed{\begin{aligned} 4(EG-F^2)^2K = {} & E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_u^2) + G(E_uG_u - 2E_uF_v + E_v^2) + \\ & + F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v + 4F_uF_v - 2F_uG_u) - \\ & - 2(EG-F^2)(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}) . \end{aligned}} \tag{14}$$

In Artikel 12 folgt die geometrische Interpretation von (14), die wörtlich in folgender Formulierung gipfelt (vgl. G.W. 4, S. 237):

„Formula itaque articuli praecedentis sponte perducit ad egregium THEOREMA: *Si superficies curva in quacumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet“.* $(\tilde{15})$

Das ist also das weithin bekannte

Theorema egregium (Isometrie-Invarianz der Gauß'schen Krümmung): *Gestattet eine krumme Fläche des* $\mathbb{E}^3$ *eine isometrische Abbildung auf eine andere solche, so stimmen die Werte der Gauß'schen Krümmungen beider Flächen in den (unter der Isometrie) korrespondierenden Punkten überein.* *(15)*

Hieraus zieht Gauß die Folgerungen:

Bei isometrischer Abbildung zweier krummer Flächen des $\mathbb{E}^3$ *aufeinander stimmen die Totalkrümmungen korrespondierender kompakter Teilmengen* (vgl. (9)) *überein,* (16)

sowie (vgl. G.W. 4, S. 344, Z. 12 v. u.):

„In einer krummen Fläche, die in eine Ebene abgewickelt werden kann, ist das Krümmungsmaß überall $=0$. *Man leitet daraus sofort die charakteristische Gleichung der in eine Ebene abwicklungsfähigen Flächen ab, nämlich insofern* z *als Funktion von* x und y *betrachtet wird* (vgl. (5), (10), der Verf.), (17)

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0,$$

eine Gleichung, die zwar längst bekannt, aber nach des Verf. Urteil bisher nicht mit der erforderlichen Strenge bewiesen war.“

[Man beachte: Gauß selbst hat – im Gegensatz zu der später oft (insbesondere von W. Blaschke) verwendeten Terminologie – nicht die Gleichung (14), sondern die Aussage (15) als „Theorema egregium" bezeichnet, und er sagt lediglich (vgl. $(\widetilde{15})$), daß die Formel (14) wie „von selbst (= sponte) zum Theorema egregium hinführt". –

Das Theorema egregium (15) wird ferner oft zitiert als Satz über die „Biegungsinvarianz" der Gauß'schen Krümmung, ein Terminus, der vermutlich erst von J. Weingarten (vgl. [26], S. 182, Z. 18) im Jahre 1883 eingeführt wurde. Da es Flächen des $\mathbb{E}^3$ gibt, die isometrisch sind, aber nicht ineinander „verbogen" (d.h. durch eine stetige Schar isometrischer Immersionen in $\mathbb{E}^3$ ineinander übergeführt) werden können, so kennzeichnet „Isometrie-Invarianz der Gauß'schen Krümmung" den Inhalt des Theorema egregium (vgl. $(\widetilde{15})$) zutreffender, entspricht wohl auch der Intention von Gauß besser: Die folgende Formulierungsvariante, die Gauß der Aussage (16) an anderer Stelle (bereits vor der Publikation der Disquisitiones generales in einer Notizensammlung, vgl. G.W. 8, S. 372) gegeben hat, läßt nämlich fast sicher vermuten, daß Gauß die „Isometrie-" und nicht nur die „Biegungs-Invarianz" im Auge hatte: Dieser Formulierung zufolge ist die Totalkrümmung einer „Figur" einer krummen Fläche die gleiche, wenn diese Fläche „eine" oder „eine andere Gestalt" im Raume „annimmt". (Beachte dazu auch die analoge Formulierung in (18)).]

(vi) Im Artikel 13 entwirft Gauß sein berühmt-gewordenes Programm zur (heute so genannten) „Inneren (= intrinsecen) Differentialgeometrie der Flächen". Dazu zitieren wir Gauß selbst aus seinem in deutscher Sprache verfaßten Autor-Referat („Selbstanzeige ....", vgl. G.W. 4, S. 344) zu den Disquisitiones generales vom Jahre 1828[4]). Im Anschluß an eine Deutung der Resultate (14), (15), (16), (17) fährt Gauß dort fort:

(18) *„Diese Sätze führen dahin, die Theorie der krummen Flächen aus einem neuen Gesichtspunkte zu betrachten, wo sich der Untersuchung ein weites noch ganz unangebautes Feld öffnet. Wenn man die Flächen nicht als Grenzen von Körpern, sondern als Körper, deren eine Dimension verschwindet, und zugleich als biegsam, aber nicht als dehnbar betrachtet, so begreift man, daß zweierlei verschiedene Relationen zu unterscheiden sind, teils nämlich solche, die eine bestimmte Form der Fläche im Raum[5]) voraussetzen, teils solche, welche von den verschiedenen Formen, die die Fläche annehmen kann, unabhängig sind. Die letzteren sind es, wovon hier die Rede ist: nach dem, was vorhin bemerkt ist, gehört dazu das Krümmungsmaß; man sieht aber leicht, daß eben dahin die Betrachtung der auf der Fläche konstruierten Figuren, ihrer Winkel, ihres Flächeninhalts und ihrer Totalkrümmung, die Verbindung der Punkte durch kürzeste Linien u. dgl. gehört. Alle solche Untersuchungen müssen davon ausgehen, daß die Natur der krummen Fläche an sich[5]) durch den Ausdruck eines unbestimmten Linearelements in der Form* $\sqrt{(Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2)}$ *gegeben ist."*

Dieser Auszug aus dem Autor-Referat von Gauß (vgl. G.W. 4, S. 344) stellt i.w. eine kurzgefaßte freie Übersetzung des Artikels 13 der Disquisitiones generales dar, die außerdem auch inhaltlich vollständig ist, bis auf einen nicht übernommenen Satz (vgl. G.W. 4, S. 238, Z. 8ff), der die Konzeption des Programms (18) gut illustriert, und den wir deshalb anfügen:

(19) *„Bei dieser Betrachtungsweise werden eine ebene Fläche und eine in eine Ebene abwickelbare Fläche, z.B. eine zylindrische, kegelförmige u.s.w., als wesentlich identisch angesehen."*

---

4) Zur Begründung unserer Wahl dieser Quelle und nicht der deutschen Übersetzung der „Disquisitiones generales" durch A. Wangerin (vgl. [25]) beachte die unten folgende Warnung.

5) Gesperrt gesetzt vom Verf. dieses Vortrags.

Warnung: Die (insbesondere wegen ihrer vielen zusätzlichen Quellenangaben sehr verdienstvolle) Übersetzung der Disquisitiones generales von A. Wangerin (vgl. [25]) ist gerade bei dem wohl bedeutendsten Satz des Artikels 13

(20) *„…, modusque genuinus indolem superficiei ita consideratae generaliter exprimendi semper innititur formulae* $\sqrt{Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2}$, *quae nexum elementi cum duabus indeterminatis* p, q *sistit"*

derart ungenau, daß sie ihn fast entwertet, zumindest aber den spezifischen Sinn von (20) unterschlägt! Wangerin übersetzt (20) (vgl. [25], S. 25) nämlich als:

> *„Der eigentliche Ausgangspunkt für den allgemeinen Ausdruck einer Fläche bei solcher Auffassung liegt in der Formel* $\sqrt{Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2}$, *welche den Zusammenhang eines Bogenelements mit zwei Hilfsvariablen darstellt."*

Demgegenüber geht es Gauß mit dem Satz (20) doch offensichtlich nicht um „den allgemeinen Ausdruck einer Fläche", sondern um die „analytische Erfassung der innergeometrischen Natur" einer krummen Fläche! Philologisch genauer übersetzt lautet (20) nämlich:

Die natürliche Weise („modus genuinus"), *wie die* („indoles superficiei ita consideratae", d. h. in wörtlicher Übersetzung: die) *„naturgegebene Ausstattung der so betrachteten Fläche"* [Gauß übersetzt „indoles superficiei" (vgl. (18)) als „die Natur der Fläche an sich"] *allgemein* (analytisch) *auszudrücken ist, gründet stets in einer Formel* $\sqrt{Edp^2 + Fdpdq + Gdq^2}$, *welche die Verbindung des Bogenelements mit zwei Variablen* p, q *herstellt.* –

Da sich das „so betrachtet" auf die unmittelbar zuvor erklärten Ziele und Aspekte der sog. „inneren Differentialgeometrie der Flächen" bezieht, so bedeutet die Aussage (20) (sprachlich freier, aber streng sinngemäß formuliert):

(21) *Der analytische Ausdruck für die „metrische Natur" einer unter dem Blickwinkel der inneren (= intrinsecen) Differentialgeometrie betrachteten Fläche ist stets eine quadratische Form* $Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$ *zur Längenmessung ihrer Tangentenvektoren, welche (damit) die Verbindung der „metrischen Natur" zur „2-dimensional-differenzierbaren Natur" der Fläche herstellt.*

Artikel 13 schließt mit der Ankündigung, daß zur weiteren Illustration des Programms (18) in den folgenden Artikeln zunächst erst die Grundlagen der Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen herzuleiten sei.

(vii) In den Artikeln 14, 15, 16 werden Grundeigenschaften gewisser Familien von normalen[6]) Geodätischen einer krummen Fläche M des $\mathbb{E}^3$ hergeleitet, die wir heute als fundamentale Eigenschaften der Exponentialabbildung von M (z. T. unter dem Namen „Gauß-Lemma") kennen, genauer:

In Artikel 14 werden die gewöhnlichen Differentialgleichungen für normale Geodätische einer gegebenen krummen Fläche M des $\mathbb{E}^3$ aufgestellt, und zwar ausgedrückt durch die bereits von Euler 1744 (vgl. [7]) gefundene, äußere (= extrinsece) Bedingung: Der Beschleunigungsvektor der als Kurve im $\mathbb{E}^3$ aufgefaßten normalen[6]) Geodätischen der Fläche M (d. h. in Nicht-Wendepunkten dieser Raumkurve: der Hauptnormalvektor dieser Raumkurve) ist stets orthogonal zur Fläche. – In Artikel 15, 16 beweist Gauß dann den geometrisch folgenreichen

Satz („Gauß-Lemma"): Vor *Sei* M *eine Fläche des* $\mathbb{E}^3$, *seien* I, J *Intervalle von* $\mathbb{R}$, *die* 0 *enthalten*[7]), *und sei* $f\colon I \times J \longrightarrow M$ *eine differenzierbare Abbildung des Rechtecks* $I \times J$ *der* (u, v)-*Ebene* $\mathbb{R}^2$ *in* M, *so daß für alle* $v \in J$ *gilt:*

(22) $f(..,v): I \longrightarrow M, \bigl(u \longmapsto f(u,v)\bigr)$, *ist eine normale*[6]) *Geodätische in* M, (*)
und
$<f_u(0,v), f_v(0,v)> = 0.$ (**)
Beh.: $<f_u(u,v), f_v(u,v)> = 0$ *für alle* $(u,v) \in I \times J$, (***)

d.h. in mehr geometrischer Sprache: Sind die u-Parameterkurven von f sämtlich normale Geodätische von M (vgl. (*)), die zu mindenstens einer v-Parameterkurve von f orthogonal sind (vgl. (**)), so bilden die u- und v-Parameterkurven von f überhaupt ein orthogonales Kurvennetz auf M (vgl. (***)).

Für die zwei Spezialfälle, daß $f(0,\ldots): J \longrightarrow M$ konstant bzw. eine injektive Immersion ist, erhält man also aus (22) folgende Resultate der inneren Differentialgeometrie:

(23) *Die Endpunkte der geodätischen Radien konstanter Länge* ε, *die von einem festen Punkt* A *einer Fläche* M (*des* $\mathbb{E}^3$) *ausgehen, liegen auf einer zu den Radien orthogonalen Kurve* (die für kleine Werte von $\varepsilon > 0$ gerade die sog. ε-Abstands-Sphäre in M um A ist).

bzw.

(24) *Die Endpunkte der geodätischen Lote konstanter Länge* ε, *die in den sämtlichen Punkten einer regulären Kurve* c *der Fläche* M (*des* $\mathbb{E}^3$) *errichtet sind, liegen auf einer zu diesen Loten von* c *orthogonalen Kurve* (die für kleine Werte von $\varepsilon > 0$ gerade die sog. ε-Parallelkurve zu c ist).

Bemerkung: a) Gauß beweist in Artikel 15 (vgl. G.W. 4, S. 240) explizit zunächst nur die Aussage (23), stellt dann aber in Artikel 16 (vgl. G.W. 4, S. 241, Z. 11 v.u.) ausdrücklich fest, daß sein Beweis von (23) aus Artikel 15 ohne jede analytische Veränderung sofort das allgemeine Resultat (22) bzw. (24) mit liefert. –

b) In heutiger Terminologie bedeutet die Vor. (22) (*) über f gerade:

$$f(u,v) = \exp^M_{f(0,v)}\bigl(u\, f_u(0,v)\bigr) \quad \textit{und} \quad \|f_u(0,v)\| = 1 \qquad \textit{für alle} \quad (u,v) \in I \times J,$$

weshalb die Beh. (22) (***) eine Aussage über das Differential der Exponentialabbildung $\exp^M$ von M ist, insbesondere liefert (23) die heute (leider allein) als „Gauß-Lemma“ zitierte wohlbekannte Eigenschaft von $\exp^M_A|_*$, und (24) die bekannte Eigenschaft der (von $\exp^M$ induzierten) geodätischen Tuben-Umgebungs-Abbildung für die Kurve c in M.

(viii) In Artikel 17, 18 betrachtet Gauß wieder eine Fläche M des $\mathbb{E}^3$ in der Darstellung (4): $f: U \longrightarrow \mathbb{E}^3$. Der orientierte Winkel eines Einheitsvektors **a** an M im Punkte $f(u,v)$ gegen den Tangentenvektor $f_u(u,v)$ der u-Parameterkurve ist dann (vgl. G.W. 4, S. 242, Z. 8 v.u.) die eindeutig bestimmte Zahl $\vartheta(\mathbf{a}) \in]-\pi,\pi]$ mit

$$\cos\bigl(\vartheta(\mathbf{a})\bigr) = \frac{<f_u, \mathbf{a}>}{\sqrt{E}} \quad \textit{und} \quad \sin\bigl(\vartheta(\mathbf{a})\bigr) = \frac{<Ef_v - Ff_u, \mathbf{a}>}{\sqrt{E}\sqrt{EG-F^2}}. \tag{25}$$

Gauß führt dann ein (vgl. G.W. 4, S. 243, Z. 14) die sog. *Winkelvariation* Θ *von* f[8]), definiert als (vgl. (13))

[6]) „normale Geodätische“ = auf Bogenlänge parametrisierte Geodätische.
[7]) Im Original bei Gauß hat I immer die spezielle Gestalt $[0,\varepsilon]$ mit $\varepsilon > 0$, was aber überhaupt keinen Unterschied ausmacht.

$$\Theta := \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}} \left(\frac{F}{E}\, dE + E_v du - G_u dv - 2F_u du\right), \tag{26}$$

und zeigt für diese Differentialform 1-ten Grades: Ist c: $[0,\sigma] \longrightarrow M$ eine normale Geodätische mit $\vartheta(c(s)) \neq \pi$ für alle $s \in [0,\sigma]$[9]), so folgt (vgl. G.W. 4, S. 243, Z. 14):

$$(\vartheta(\dot c))' = \Theta(\dot c), \qquad d.h. \quad \int_c \Theta = \vartheta(\dot c(\sigma)) - \vartheta(\dot c(0)), \tag{27}$$

d.h.: Das Integral (27) mißt die Variation des orientierten Winkels des Geschwindigkeitsvektors der Geodätischen gegen die jeweilige positive Richtung der u-Parameterkurven von f, wenn man c durchläuft.

Beachte: Letztere Aussage kann man offenbar auch so wenden:
Das Integral (27) mißt die Variation des Winkels des positiven Tangentenvektorfeldes f_u der u-Parameterlinien gegen die jeweilige Richtung der Geodätischen c, wenn man c durchläuft. – Investiert man daher den Begriff der Levi-Civita-Parallelverschiebung (über die Gauß natürlich noch nicht verfügte) und beachtet, daß $\dot c$ parallel längs c ist i.S. von Levi-Civita, so liefert die letzte Bemerkung folgende interessante Interpretation von (27):

Das Integral (27) *mißt den Winkel, um den sich das positive Tangentenvektorfeld der* u-*Parameterkurven* f_u *längs* c *aus der* Levi-Civita-*parallelen Richtung längs* c *herausdreht.* $(\widetilde{27})$

(ix) In Artikel 19 führt Gauß (vgl. G.W. 4, S. 244, Z. 44 ff) eine Klasse spezieller *Karten einer Fläche* M des $\mathbb{E}^3$ ein, *die sich für trigonometrische Untersuchungen an kleinen geodätischen Dreiecken der Fläche* M (denen die restlichen Artikel der Disquisitiones generales gewidmet sind) *besonders gut eignen:* Eine solche Karte, eine sog.

> „*abszissen-geodätische Orthogonalkarte*[10]), ist eine Immersion $f: U \longrightarrow M$ eines offenen achsenparallelen Rechtecks U der (u, v)-Ebene $\mathbb{R}^2$, bei welcher alle u-Parameterkurven von f
> a) normale Geodätische von M sind, die außerdem
> b) sämtliche v-Parameterkurven von f orthogonal schneiden. (28)

Für eine solche Karte (28) folgt also (vgl. (13)):

$$E \equiv 1, \qquad F \equiv 0, \qquad EG - F^2 = G, \tag{29}$$

((29) impliziert jedoch umgekehrt noch nicht (28) a)!).

Anm. des Verf.s: Ein signifikantes Beispiel für (28) ist eine Karte einer Rotationsfläche M des $\mathbb{E}^3$, bei der die u-Linien die (auf Bogenlänge parametrisierten!) Mediankurven und die v-Linien die Breitenkreise von M sind.

Zwei Spezialfälle solcher Karten (28), die für jede Fläche M des $\mathbb{E}^3$ lokal existieren, werden von Gauß besonders erwähnt, wir geben sie in heutiger Notation kurz an (ihre geometrische Deutung wird durch (23) bzw. (24) erhellt): Sei A ein Punkt der Fläche M

8) Gauß notiert diese Form Θ als $d\vartheta$, was im Hinblick auf das Resultat (27) sehr suggestiv ist; da aber Θ i.a. nicht exakt ist (vgl. unten $(\widetilde{32})$), so vermeiden wir diese Notation. – In (26) müßte es formal richtiger $f^*\Theta$ statt Θ heißen.

9) Diese im allgemeinen notwendige Voraussetzung für die Gültigkeit der Gleichung (27) (sonst gilt (27) nur als Kongruenz modulo 2π) tritt bei Gauß nicht explizit als Voraussetzung auf, ist aber in allen Anwendungen von (27), die Gauß gibt, tatsächlich erfüllt.

und $(\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2)$ ein Paar orthonormaler Tangentenvektoren an M in A. Dann gibt es $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ folgender Art:

Die Abbildung f: $]0,\varepsilon[\times\mathbb{R} \longrightarrow M$ $\big($vgl. (30)$\big)$ durch sog. *„geodätische Polarkoordinaten in* A $\big($*bzgl.* $(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)\big)$*“*[10]) mit

$$f(r,\varphi) := \exp_A^M\big(r\cdot(\cos\varphi\mathbf{a}_1+\sin\varphi\mathbf{a}_2)\big) \quad \textit{für}\ (r,\varphi)\in\,]0,\varepsilon[\times\mathbb{R}, \tag{30}$$

bzw. die Abbildung f: $]-\varepsilon,\varepsilon[^2 \longrightarrow M$ $\big($vgl. (31)$\big)$ durch sog. *„geodätische Parallelkoordinaten (längs* c *bzgl.* $\mathbf{a}_1$)*“* [10]) [11]) mit

$$f(u,v) := \exp_{c(v)}^M\big(u\cdot\mathbf{n}(v)\big) \quad \textit{für}\ (u,v)\in\,]-\varepsilon,\varepsilon[\times]-\varepsilon,\varepsilon], \tag{31}$$

wobei in (31) $c\colon]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow M$ die normale Geodätische von M mit $c(0)=A$ und $\dot c(0)=\mathbf{a}_1$ sowie $\mathbf{n}\colon]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow TM$ das stetige Einheitsnormalfeld der Geodätischen c in M mit $\mathbf{n}(0)=\mathbf{a}_2$ bezeichnet, ist eine abszissen-geodätische Orthogonalkarte für M $\big($vgl. (28)$\big)$, wie aus dem Korollar (23) bzw. (24) zum Gauß-Lemma (22) folgt.

Für eine allgemeine abszissen-geodätische Orthogonalkarte f der Fläche M $\big($vgl. (28)$\big)$ liest Gauß mittels (29) aus (14) bzw. (26) dann (vgl. G.W. 4, S. 244, Z. 13 v.u.) für die Gaußsche Krümmung K bzw. die Differentialform Θ der Winkelvariation von f $\big($vgl. (26)$\big)$ unmittelbar folgende Darstellung ab:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu} \qquad \textit{bzw.} \qquad \Theta = -(\sqrt{G})_u dv. \tag{32}$$

Für den Spezialfall der geodätischen Polarkoordinaten $\big($vgl. (30), wo $u := r$, $v := \varphi\big)$ führt Gauß, ergänzend zu (32), gesondert aus (vgl. G.W. 4, S. 244, Z. 4 v.u.[12])): Die Funktionen $\sqrt{G}$, $(\sqrt{G})_r$, $(\sqrt{G})_{rr}$ sind im Falle (30) mit f auf $[0,\varepsilon[\times\mathbb{R}$ (d.h. nach $r=0$) stetig fortsetzbar mit

$$\sqrt{G}(0,\varphi)=0,\ (\sqrt{G})_r(0,\varphi)=1\ \textit{und}\ (\sqrt{G})_{rr}(0,\varphi)=0\ \textit{für alle}\ \varphi\in\mathbb{R}. \tag{33}$$

Man beachte: In E. Cartan's Kalkül der äußeren Differentialformen ausgedrückt bedeutet (32) wegen $d\sigma=\sqrt{G}\,du\wedge dv$ $\big($vgl. (29)$\big)$:

$$Kd\sigma = -(\sqrt{G})_{uu}du\wedge dv = d\Theta, \tag{$\widetilde{32}$}$$

was – im Hinblick auf Stokes' Integralformel – ins Auge springen läßt, daß (32) der analytische Kern von Gauß' Beweis für den folgenden Satz (34) ist (vgl. G.W. 4, S. 245, Z. 6 v.u.). Das ist der heute so genannte

Satz von Gauß-Bonnet *für („kleine“) geodätische Dreiecke* Δ *einer Fläche* M *des* E^3 *mit den Eckenwinkeln* α,β,γ:

$$\int_\Delta K d\sigma = (\alpha+\beta+\gamma)-\pi. \tag{34}$$

[10]) Dieser durch Gauß' Erklärung nahegelegte Terminus steht nicht bei ihm.

[11]) Die sinngemäßen Analoga der Karten (31) (mit Levi-Civita-parallelen Normalenfeldern $\mathbf{n}$) längs einer normalen Geodätischen c einer Riemannschen Mannigfaltigkeit heißen heute „Fermi-Koordinaten (längs c)“.

[12]) Die dritte Gleichung von (33) erwähnt Gauß nicht explizit, sie ist aber eine triviale Folge der beiden ersten Gleichungen von (32) und (33).

In seinem Autor-Referat (vgl. G.W. $\underline{4}$, S. 345, Z. 9 v.u.) spricht Gauß dies so aus:

„Der Überschuß der Winkel eines aus kürzesten Linien gebildeten Dreiecks über zwei Rechte ist der Totalkrümmung des Dreiecks gleich“.

Er bemerkt ferner (vgl. G.W. $\underline{4}$, S. 246, Z. 9 und G.W. $\underline{4}$, S. 346, Z. 2), daß man durch „Zerschneidung“ (= discerptio) in Dreiecke (die Methode der „Triangulierung“ war ihm von der praktischen Geodäsie her, vgl. G.W. $\underline{4}$, S. 346, Z. 3 v. u., wohlvertraut) folgende Verallgemeinerung erhält:

Der Überschuß der Winkel eines Polygons von n *Seiten, wenn diese kürzeste Linien sind, über* $(n\text{-}2)\pi$ *ist gleich der Totalkrümmung des Polygons.* $(\widetilde{34})$

Anmerkung: (34) gilt i.a. nicht für beliebige geodätische Dreiecke. Gauß' Beweis von (34) setzt jedoch implizite voraus, daß das geodätische Dreieck Δ mit den Ecken A, B, C „klein“ ist in folgendem Sinne: Ist $\alpha \in \,]\,0, \pi\,[$ der Winkel an der Ecke A, so gibt es ein orthonormales 2-Bein $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ von $T_A M$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\varrho : [0,\alpha] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, so daß die sektor-artige Teilmenge

$$\{r(\cos\varphi\,\mathbf{a}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{a}_2) \mid \varphi \in [0,\alpha] \textit{ und } r \in [0, \varrho(\varphi)]\} \text{ von } T_A M$$

durch $\exp_A^M$ diffeomorph auf Δ abgebildet wird mit den Wegen

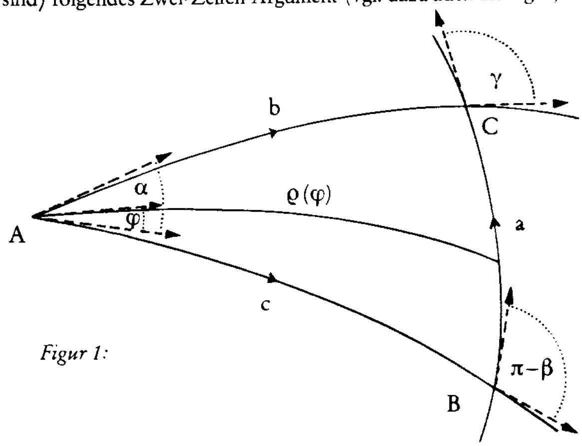
$$\left.\begin{array}{lll} c: & r \longmapsto \exp_A^M(r\,\mathbf{a}_1) & ,\ r \in [0, \varrho(0)], \\ b: & r \longmapsto \exp_A^M\big(r(\cos\alpha\,\mathbf{a}_1 + \sin\alpha\,\mathbf{a}_2)\big) & ,\ r \in [0, \varrho(\alpha)], \\ a: & \varphi \longmapsto \exp_A^M\big(\varrho(\varphi)\,(\cos\varphi\,\mathbf{a}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{a}_2)\big) & ,\ \varphi \in [0,\alpha], \end{array}\right\} \qquad (*)$$

als den geodätischen Seiten des Dreiecks Δ. Man beachte, daß die Seite a des Dreiecks Δ (vgl. (*)) die r-Parameterlinien der Abbildung

$$(r, \varphi) \longmapsto \exp_A^M\big(r(\cos\varphi\,\mathbf{a}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{a}_2)\big)$$

nie unter einem Winkel π schneidet, so daß auf das Integral $\int_a \Theta$ das Resultat (27) angewendet werden kann. [Wir merken noch an: Liegt das Dreieck Δ z. B. ganz in einer „geodätisch-konvexen“ Umgebung der Ecke A, was für hinreichend *kleine* Δ stets der Fall ist, so liegt die in Gauß' Beweis von (34) vorausgesetzte, zuletzt beschriebene Situation sicher vor.]

Gauß' Beweis für (34) ist dann (nach den Vorarbeiten (27), (32), (33) und unter Beachtung von (*) und (30), wonach die Dreiecksseiten b, c r-Parameterkurven der geodätischen Polarkoordinaten in A sind) folgendes Zwei-Zeilen-Argument (vgl. dazu auch die Fig. 1):



Figur 1:

$$\int_{\Delta} K d\sigma \underset{(32)}{=} -\int_0^{\alpha}\int_0^{\varrho(\varphi)} (\sqrt{G})_{rr}(r,\varphi)\, dr d\varphi = -\int_0^{\alpha} \big((\sqrt{G})_r(\varrho(\varphi),\varphi) - (\sqrt{G})_r(0,\varphi)\big)\, d\varphi =$$

$$\underset{(33)}{=} \alpha - \int_0^{\alpha} (\sqrt{G})_r\big(\varrho(\varphi),\varphi\big)\, d\varphi \underset{(32),(*)}{=} \alpha + \int_a \Theta \underset{(27),(26)}{=} \alpha + \gamma - (\pi - \beta).$$

(x) Der „Satz von Gauß-Bonnet" in der von Gauß angegebenen Gestalt (34) gestattet eine Deutung als ein „lokaler Vergleichssatz", der die Winkelsumme eines („kleinen") geodätischen Dreiecks auf einer gekrümmten Fläche einerseits mit der Winkelsumme π eines geradlinigen Dreiecks der euklidischen Ebene auf der anderen Seite vergleicht und die Abweichung zwischen beiden Winkelsummen mittels der Krümmung der Fläche berechnet. Weniger bekannt geworden ist, daß Gauß die letzten neun Artikel 21 bis 29 (mit etwa einem Drittel des Seitenumfangs!) der Disquisitiones generales fast ausschließlich der Herleitung von Sätzen widmet, die einen Vergleich geben zwischen einzelnen Winkeln (und nicht nur der Winkelsumme!) sowie auch zwischen dem Flächeninhalt von geodätischen Dreiecken krummer Flächen einerseits und geradlinigen Dreiecken gleicher Seitenlängen in der euklidischen Ebene andererseits[13]:

Diese zuletzt angesprochenen Vergleichssätze sind jedoch (im Gegensatz zu dem lokalen Resultat (34)) nur noch infinitesimal, d.h. unter der Voraussetzung reeller Analytizität der krummen Fläche wird die Abweichung des gekrümmten Falles vom euklidischen Fall als Potenzreihe nach den (gemeinsamen) Seitenlängen a, b, c angesetzt und die Koeffizienten dieser Potenzreihen bis zu den Termen dritter Ordnung einschließlich berechnet. Die zwei prägnantesten Resultate der Disquisitiones generales zu diesem Thema sind (vgl. unten (35), (36)) enthalten in dem

Satz: *Sei* Δ *ein „kleines" Kürzesten-Dreieck einer krummen Fläche* M *des* $\mathbb{E}^3$ *mit den Ecken* A, B, C, *den Winkeln* α, β, γ *und den Längen* a, b, c *der* (beziehungsweise den Ecken A, B, C gegenüberliegenden) *Seiten. Bezeichne* σ *den Flächeninhalt von* Δ *in* M *und* K(A), K(B), K(C) *die Werte der Gauß'schen Krümmung in den Ecken von* Δ. *Aus der Kürzesten-Eigenschaft der Seiten von* Δ *folgt* $a \leqq b + c$, *also existiert ein geradliniges Dreieck* Δ^* *der euklidischen Ebene* $\mathbb{E}^2$ *mit den gleichen Seitenlängen* a, b, c *wie* Δ. $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ *seien die korrespondierenden Winkel,* σ^* *der Flächeninhalt von* Δ^* (gemessen i.S. der euklidischen Geometrie von $\mathbb{E}^2$). *Dann gelten folgende Reihenentwicklungen in* a, b, c:

Infinitesimaler Winkel-Vergleichssatz (vgl. G.W. 4, S. 257, Z. 8 v.u.):

$$\alpha = \alpha^* + \frac{\sigma}{12}\big(2K(A) + K(B) + K(C)\big) + \quad (35)$$
$$+ \ (\textit{Terme von mindestens 4-ter Ordnung in } a, b, c)$$

[13] Der geringe Bekanntheitsgrad dieser Vergleichssätze wundert um so mehr, insofern sie von Gauß (vgl. G.W. 4, S. 255, Z. 10 v.u.) mit deutlicher Emphase angekündigt werden: „Magnam utilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuius latera aequalia sunt ipsis a, b, c."

und ein

Infinitesimaler Flächeninhalts-Vergleichssatz (vgl. G.W. 4, S. 258, Z. 9 v.u.):

$$\sigma = \sigma^* \Big(1 + \frac{1}{120}\big(K(A)(s\text{-}a^2) + K(B)(s\text{-}b^2) + K(C)(s\text{-}c^2)\big) + \\ + (\textit{Terme von mindestens 4-ter Ordnung in } a, b, c)\Big), \tag{36}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist $s := 2(a^2 + b^2 + c^2)$. (37)

Anmerkungen: a) Natürlich gelten die zu (35) analogen Formeln für β und γ. b) Gauß berechnet für (35) (vgl. G.W. 4, S. 256, Formel 11) sogar noch die Terme vierter Ordnung, allerdings nicht in einer völlig expliziten Form, so daß wir hier auf diese Beschreibung verzichtet haben. Ist jedoch M von konstanter Krümmung K_0 (z.B. $K_0 = R^{-2}$, wenn M eine Sphäre vom Radius R in $\mathbb{E}^3$ ist), so lassen sich diese Terme vierter Ordnung noch übersichtlich angeben und führen zu der Formel (vgl. G.W. 4, S. 257, Z. 10):

$$\alpha = \alpha^* + \frac{\sigma}{3}K_0 + \frac{\sigma}{180}K_0^2(b^2 + c^2 - 2a^2) + \\ + (\textit{Terme von mind. 5-ter Ordnung}), \tag{38}$$

wobei der Spezialfall dieser Formel für die Sphäre vom Radius R ($K_0 = R^{-2}$):

$$\alpha = \alpha^* + \frac{\sigma}{3}K_0 + (\textit{Terme von mindestens 4-ter Ordnung in } a, b, c) \tag{39}$$

schon 1787 von Legendre ([17], S. 426) bewiesen worden war. Die Verallgemeinerung, die Gauß diesem Resultat (39) von Legendre für sphärische geodätische Dreiecke durch (35) auf geodätische Dreiecke beliebiger gekrümmter Flächen gegeben hat, war von ihm durchaus mit Blick auf die praktische Geodäsie konzipiert: Betrachtet man nämlich die Erdoberfläche einmal als eine Sphäre, zum anderen aber als ein (zu den Polen hin schwächer gekrümmtes) Sphäroid, so ist (bei Vernachlässigung der Glieder 4-ter Ordnung) im ersteren, sphärischen Falle nach Legendre die Winkelkorrektur bei allen Dreieckswinkeln die gleiche, während im zweiten, sphäroidischen Falle nach Gauß die den Polen näheren Dreiecksecken, in denen also die Gaußsche Krümmung kleiner ist, eine kleinere Winkelkorrektur erhalten. Gauß gibt diese gemäß (35) unterschiedlichen Korrekturwerte für eines der größten von ihm selbst vermessenen irdischen Dreiecke, nämlich das mit den „Ecken“: Brocken, Hohehagen[14]), Inselsberg (die in dieser Reihenfolge immer Nordpol-ferner liegen)[15]) im Artikel 28 der Disquisitiones generales (vgl. G.W. 4, S. 258) zu den folgenden Werten in Winkelsekunden an:

4,95104″ bzw. 4,95113″ bzw. 4,95131″,

während die sphärische, für alle Winkel gleiche Korrektur nach Legendre (vgl. (39)) in diesem Falle einheitlich 4,95116″ beträgt. Zu diesem theoretischen bzw. numerischen Vergleich seines Resultats (35) mit Legendre's Resultat (39) für die Zwecke der Geodäsie findet sich folgende interessante Bemerkung von Gauß in einem Brief an seinen Freund Olbers[16]) vom 1.3.1827 (vgl. G.W. 9, S. 378): *„In praktischer Hinsicht*

[14]) Dieser weniger bekannte Berg liegt zwischen Göttingen und (Hann.) Münden.

[15]) Die Seiten dieses Dreiecks sind ungefähr 69, 85, 107 Kilometer lang.

[16]) Heinrich Wilhelm Olbers (1758–1840) war praktischer Arzt in Bremen, der privatim eine kleine Sternwarte betrieb.

ist dies (gemeint ist das aus (35) folgende Resultat über die Ungleichheit der Winkelkorrektur für geodätische Dreiecke des Erd-Sphäroids, der Verf.) *zwar ganz unwichtig, weil in der Tat bei den größten Dreiecken, die sich auf der Erde messen lassen, diese Ungleichheit in der Verteilung unmerklich wird; aber die Würde der Wissenschaft erfordert doch, daß man die Natur dieser Ungleichheit klar begreife.*"

c) Wir verdeutlichen noch, in welchem Sinn die betrachteten geodätischen Dreiecke „klein" sein müssen, wie wir es in den Voraussetzungen für die Gültigkeit von (35), (36) formuliert haben: Gauß wählt zunächst geodätische Parallelkoordinaten $f:]-\varepsilon,\varepsilon[^2 \to M$ wie in (31), für die also das „Linienelement" die Gestalt besitzt

$$du^2 + G(u,v)\,dv^2,^{17)} \tag{40}$$

1.) $f(]-\varepsilon,\varepsilon[^2)$ – in heutiger Terminologie – ganz in der Bildmenge $\exp^M_{f(0,0)}(B)$ liegt, wobei B eine Vollkugel um den Ursprung von $T_{f(0,0)}M$ ist, auf welcher die Exponentialabbildung diffeomorph ist, (Gauß formuliert dies mittels der von ihm eingeführten geodätischen Polarkoordinaten in $f(0,0)$, vgl. (30)),
2.) die Funktion $\sqrt{G(u,v)}$ (vgl. (41) und beachte die oben getroffene Analytizitätsvoraussetzung über M) in eine für alle $u,v \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ konvergente Potenzreihe in u und v entwickelt werden kann, deren Werte in $]0,2[$ liegen (letzteres garantiert, daß auch $\sqrt{G(u,v)}^{-1}$ durch eine konvergente Potenzreihe auf $]-\varepsilon,\varepsilon[^2$ dargestellt werden kann).

Gauß betrachtet nun für $u,u',v \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ mit $u'<u$ und $v>0$ das geodätische Dreieck mit den Ecken

$$A := f(0,0), \quad B := f(u,v), \quad C := f(u',v) \tag{41}$$

mit den folgenden normalen Geodätischen $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}$ als Kanten:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{a}(t) &:= f(t,v) && \textit{für } t\in[u',u] \quad \big(\text{wobei f wie in (31)}\big), \\ \tilde{b}(t) &:= \exp^M_A(ta') && \textit{für } t\in[0,r(u',v)], \\ \tilde{c}(t) &:= \exp^M_A(ta) && \textit{für } t\in[0,r(u,v)], \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

und wobei a, a' geeignete Einheitsvektoren in T_AM sind. Für die Seiten (= Kantenlängen) a, b, c dieses Dreiecks gilt also

$$a = u - u', \quad b = r(u',v), \quad c = r(u,v). \tag{43}$$

Genau für die zuletzt gekennzeichneten „kleinen" Dreiecke beweist Gauß die Aussagen (35) und (36).

Um die zu den Vergleichssätzen (35), (36) führenden Rechnungen der Disquisitiones generales in etwa skizzieren zu können, erwähnen wir noch die Notationen von Gauß[17]) für die folgenden, im Intervall $]-\pi,\pi]$ gemessenen orientierten Winkel (vgl. (31), (42)):

$$\begin{aligned} \varphi(u,v) &:= \sphericalangle(a_1,a), & \varphi(u',v) &:= \sphericalangle(a_1,a'), \\ \psi(u,v) &:= \sphericalangle\big(c(r(u,v)), f_u(u,v)\big), & \psi(u',v) &:= \sphericalangle\big(b(r(u',v)), f_u(u',v)\big). \end{aligned} \tag{44}$$

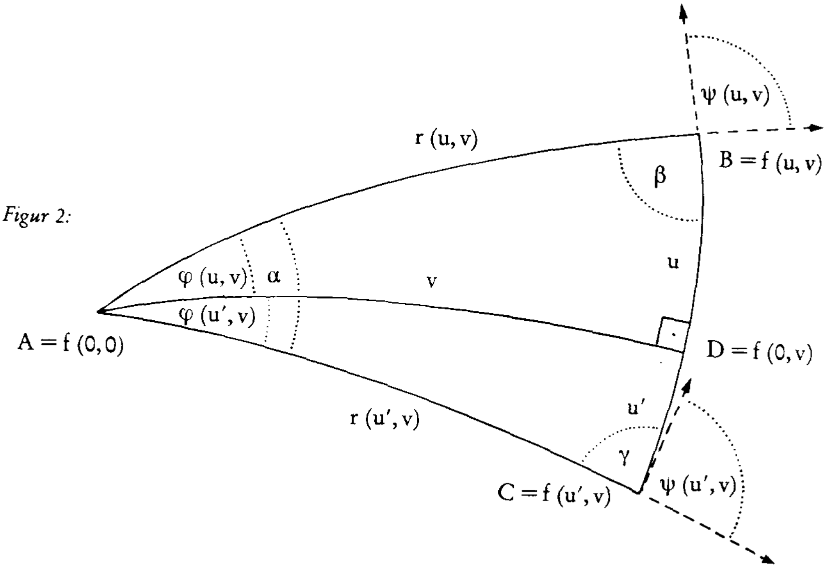
Damit erhält man überdies für die Winkel α,β,γ an den Ecken des Dreiecks:

$$\alpha = \varphi(u,v) - \varphi(u',v), \quad \beta = \psi(u,v), \quad \gamma = \pi - \psi(u',v). \tag{44'}$$

Die mit diesen Daten umrissene geometrische Situation wird verdeutlicht durch die

[17]) Für den Vergleich dieser wie der folgenden Formeln mit den korrespondierenden der Disquisitiones generales beachte man: Die hier (aus Kohärenzgründen innerhalb des Vortrags) mit u bzw. v bezeichneten Parameter der geodätischen Parallelkoordinaten (31) heißen bei Gauß q bzw. p.

Figur 2:



Der entscheidende Ansatz von Gauß für die Reihenentwicklungsresultate (35), (36) hat folgenden Ausgangspunkt: Da die spezielle v-Parameterkurve $w: v \longmapsto f(0, v)$ zufolge (31) eine normale Geodätische ist, welche die u-Parameterkurven senkrecht (also unter einem konstanten!) Winkel schneidet, so folgt aus (27): $\Theta(\dot{w}(v)) = 0$ für alle $v \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, d. h. nach (32) (vgl. G.W. 4, S. 250, Z. 5 v. u.):

$$(\sqrt{G})_u(0, v) = 0, \quad \textit{und weiter} \quad (\sqrt{G})(0, v) = 1 \quad \textit{für alle } v \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \tag{45}$$

denn $\sqrt{G}(0, v) = \langle \dot{w}(v), \dot{w}(v) \rangle$ und w normale Geodätische. Wegen (45) ist die Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{G}(u, v)$ für $u, v \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ von folgender Art (vgl. G.W. 4, S. 250, Z. 2 v. u.):

$$\sqrt{G}(u, v) = 1 + f(v)u^2 + g(v)u^3 + h(v)u^4 + \ldots \tag{46}$$

mit Potenzreihen $f(v)$, $g(v)$, $h(v)$ *in* v, *deren Koeffizienten bzw. mit* $f^0, f', f'', \ldots$, $g^0, g', g'', \ldots, h^0, h', h''$ *bezeichnet werden.*

Die Koeffizienten dieser Potenzreihen f, g, h, .. bestimmen also die innere Metrik (40) von M vollständig. Unter Benutzung von (46) und der für geodätische Parallelkoordinaten gültigen Gleichung $\sqrt{G}K = -(\sqrt{G})_{uu}$ (vgl. (32)) gewinnt Gauß die folgende Reihenentwicklung für die (nun als Funktion von u, v aufgefaßte) Gaußsche Krümmung K (vgl. G.W. 4, S. 254, Z. 6 v. u.):

$$K(u, v) = -2f(v) - 6g(v)u - \big(12h(v) - 2f^2(v)\big)u^2 - \ldots, \tag{47}$$

was also eine Darstellung von K(u, v) durch die Koeffizienten der Metrik (vgl. (40), (46)) liefert. Umgekehrt gestatten die Koeffizienten $f^0, f', f'', g^0, g', h^0$ der Metrik (vgl. (46)) aufgrund von (47) und dem Taylorschen Satz eine Darstellung durch Ableitungswerte der Gaußschen Krümmung in $o = (0, 0)$:

$$\begin{aligned} f^0 &= -K(o), & f' &= -\frac{1}{2}K_v(o), & f'' &= -\frac{1}{4}K_{vv}(o), \\ g^0 &= -\frac{1}{6}K_u(o), & g' &= -\frac{1}{6}K_{uv}(o), & h^0 &= \frac{1}{24}\big(K(o)^2 + K_{uu}(o)\big). \end{aligned} \tag{48}$$

(Die Gleichungen (48) werden von Gauß allerdings nur im Spezialfall $K = \text{const.}$ explizit angegeben, vgl. G.W. 4, S. 257, Z. 2.)

Unter Benutzung der von ihm in Artikel 21 bereitgestellten Transformationsgleichungen zwischen zwei verschiedenen Parametrisierungen von M (hier speziell angewendet auf den Übergang von den geodätischen Parallelkoordinaten (31) auf die geodätischen Polarkoordinaten (30)) gewinnt Gauß folgende partielle Differentialgleichungen für die (oben in (42) bzw. (44) genannten) Funktionen r bzw. φ und ψ in u, v (vgl. G.W. 4, S. 251, Z. 10, 11)[17]):

$$\left.\begin{array}{l} 4r^2G = G\left((r^2)_u\right)^2 + \left((r^2)_v\right)^2, \\ 2\sqrt{G}\, r \sin\psi = (r^2)_v, \quad 2r\cos\psi = (r^2)_u, \end{array}\right\} \tag{49}$$

$$G\,(r^2)_u\varphi_v + (r^2)_v\varphi_u = 0. \tag{50}$$

Aus (49) und (46) gewinnt Gauß nun eine Potenzreihenentwicklung in u, v für r, $r\sin\psi$ und $r\cos\psi$ (vgl. G.W. 4, S. 251, Formeln [1], [2] und S. 252, Formel [3]) und sodann hieraus und mittels (50) eine solche für $r\cos\varphi$ und $r\sin\varphi$ (vgl. G.W. 4, S. 252 Formeln [4], [5]). Für den orientierten Flächeninhalt $S(u,v)$ des geodätischen Dreiecks A, B, D mit $D := f(0,v)$ (vgl. Figur 2), für den also gilt:

$$S(u,v) \geqq 0, \textit{ falls } u \geqq 0 \quad \textit{und} \quad S(u,v) < 0, \textit{ falls } u < 0, \tag{51}$$

nennt Gauß dann (unter Berufung auf einfache „geometrische Betrachtungen") die folgende partielle Differentialgleichung (vgl. G.W. 4, S. 253, Mitte):

$$\left((r\sin\psi)\, S_v + \sqrt{G}(r\cos\psi)\, S_u\right)(u,v) = (r\sin\psi)(u,v)\left(\int_0^u \sqrt{G(\tau,v)}\, d\tau\right). \tag{52}$$

Aus (46), aus den Potenzreihenentwicklungen für $r\cos\psi$ und $r\sin\psi$ und aus (52) gewinnt er dann eine Potenzreihenentwicklung von $S(u,v)$ in u, v (vgl. G.W. 4, S. 253, Formel [7]). Damit erhält man auch für den Flächeninhalt σ des geodätischen Dreiecks A, B, C (vgl. (41), (51) und Figur 2) wegen

$$\sigma(u,u',v) = S(u,v) - S(u',v)$$

eine Potenzreihenentwicklung in den (geodätischen Parallel-) Koordinaten u, u', v der Eckpunkte B und C. Der Vergleich der so gewonnenen Potenzreihenentwicklungen in u, u', v mit (43), (44), (47) liefert dann (nach einigem kunstvollen Rechnen mit Potenzreihen) zunächst das Resultat (36) und sodann auch (35).

Damit beenden wir das Referat über den Inhalt der Disquisitiones generales.

Zur Darstellung der Disquisitiones generales

(i) Das vorangegangene Referat über den Inhalt der Disquisitiones generales mag ein wenig die hohe „Dichte" in der Substanz sowie die tiefe Durchdachtheit der „Komposition" von Definitionen und Sätzen dieser Arbeit verdeutlicht haben. In der Tat, wie wir aus Briefen und dem Nachlaß wissen, ist diese Darstellung der Disquisitiones generales die reife Frucht eines fast 15jährigen geistigen „Bewegens" dieses Gegenstandes und das Resultat harter Arbeit (insbesondere bei der Suche nach „dem" optimalen analytischen „Argument", der Gauß-Gleichung (14), für die Gültigkeit des „Theorema egregium", d.h. für die Isometrie-Invarianz der Gauß'schen Krümmung) in den letzten zwei Jahren vor der Publikation. Interessanterweise stammen auch aus dieser Zeit der differentialgeometrischen Studien die wohl bekanntesten Selbstzeugnisse von Gauß über seinen Arbeits- und Darstellungs-Stil: Aus der zuletzt genannten Phase der konkreten Vorarbeiten zu den Disquisitiones generales zitieren wir dazu aus einem Brief von Gauß an seinen Freund Olbers[16]) vom 30. 10. 1825 (vgl. G.W. 8, S. 399, Z. 6 v. u.):

„So wie die mathematische Seite einer Arbeit mir gewöhnlich die interessanteste ist, so kann ich von der anderen Seite nicht leugnen, daß ich, um an einer so ausgedehnten Arbeit Freude zu haben, doch am Ende ein schön organisiertes Ganzes muß hervorgehen sehen, was durch ein zu buntscheckiges Ansehen nicht verunstaltet wird“,
und weiter aus einem Brief vom 21. 11. 1825 an seinen Freund Schumacher[18]) (vgl. G.W. 8, S. 400, Z. 12 v. u.):

„Der Wunsch, den ich immer bei meinen Arbeiten gehabt habe, ihnen eine solche Vollendung zu geben, ut nihil amplius desiderari possit[19]), erschwert sie mir freilich außerordentlich.“

Diese und ähnliche Äußerungen sind sogar von ihm nahestehenden Freunden mißdeutet worden: So haben Schumacher[18]) und Bessel ihn (später insbesondere auch angesichts seines fortschreitenden Alters) wiederholt gedrängt, seine zahlreichen Ideen durch ein zügigeres Publizieren der Nachwelt zu erhalten, das „Ausfeilen“ dieser Ideen aber doch anderen zu überlassen: Wie tief sich Gauß durch derartige Ansinnen mißverstanden fühlte, zeigt wohl am deutlichsten der folgende Satz aus seinem Brief vom 5. 2. 1850 (im Alter von 73 Jahren, fast genau 5 Jahre vor seinem Tod), in dem er noch einmal genau diejenige Komponente seines Bemühens um die „Perfektion seiner Darstellung“ präzisiert, welche ihn so viel Zeit koste: (vgl. G.W. 10, 2, P. Stäckel: „Gauß als Geometer“, S. 10, Z. 3):

„Sie sind ganz im Irrtum, wenn sie glauben, daß ich darunter nur die letzte Politur in Bezug auf Sprache und Eleganz der Darstellung verstehe. Diese kosten vergleichungsweise nur unbedeutenden Zeitaufwand; was ich meine, ist die innere Vollkommenheit. In manchen meiner Arbeiten sind solche Inzidenzpunkte, die mich jahrelanges Nachdenken gekostet haben, und deren in kleinem Raum konzentrierte Darstellung nachher niemand die Schwierigkeit anmerkt, die erst überwunden werden muss[te].“

Hinzuzufügen ist nur noch: Diese Haltung hat Gauß ausschließlich als einen sehr persönlichen Anspruch an sich selbst verstanden und hat sie nicht etwa als einzig verbindliche Norm mathematischen Arbeitens gefordert, wie der folgende von Toleranz zeugende Abschnitt aus einem Brief an Encke vom 18. 8. 1832 belegt (vgl. G.W. 11,1, S. 84): *„Diese Art zu arbeiten kann zuweilen die Folge haben, und hat sie zuweilen gehabt, daß auf Dinge, die ich schon seit vielen Jahren besessen habe, später ihrerseits auch andere kommen, und in der Bekanntmachung mir zuvorkommen; sie wird vielleicht auch die Folge haben können, daß manches einmal mit mir ganz untergeht, und ich weiß, daß einige meiner Freunde wünschen, daß ich weniger in diesem Geiste arbeiten möchte: das wird aber nie geschehen; ich kann einmal an Lückenhaftem keine rechte Freude haben, und eine Arbeit, an der ich keine Freude habe, ist mir nur eine Qual. Möge auch jeder in dem Geiste arbeiten, der ihm am meisten zusagt.“*

[18]) Heinrich Christian Schumacher (1780–1850), Doktor der Rechte und seit 1810 Professor der Astronomie in Kopenhagen (mit einem ständigen Wohnsitz im damals zu Dänemark gehörigen Altona), war Gauß seit 1808 bis zu seinem Lebensende freundschaftlich verbunden.

[19]) Nach P. Stäckel (vgl. „Gauß als Geometer“, S. 7, G.W. 10,2) findet sich diese Formulierung bereits bei Euler.

(ii) Hinsichtlich des Darstellungs-Modus hat Gauß in den Disquisitiones generales der analytischen Methode deutlich den Vorzug gegeben: Geometrische Argumente werden – wo sie überhaupt auftreten – nur sehr knapp eingesetzt, z.B. bei den Vergleichssätzen (35) und (36) (siehe oben), wenn Gauß einige der für die Berechnung der Potenzreihenentwicklungen benötigten partiellen Differentialgleichungen als „aus einfachen geometrischen Betrachtungen folgend" ohne jeden weiteren Kommentar angibt.

Illustrierende Figuren, die im Interesse einer angenehmeren Lesbarkeit an verschiedenen Stellen der Disquisitiones generales äußerst hilfreich wären (das betrifft vor allem die mit einem nicht geringen Aufwand an mathematischen Symbolen für diverse Winkel, Abstände u.s.w. abgefaßten letzten Artikel), fehlen leider vollständig.

Gauß hat die Ambivalenz des Einsatzes analytischer Kalküle bei geometrischen Problemen (d.h. ihre Effektivität einerseits, andererseits ihre inwendige Tendenz, auf die Kraft geometrischer Intuition lähmend zu wirken) klar gesehen, wie die folgenden Ausschnitte aus seiner Rezension der „Géométrie descriptive" von G. Monge (vgl. G.W. 4, S. 359f) belegen:

„Es ist nicht zu leugnen, daß die Vorzüge der analytischen Behandlung vor der geometrischen, ihre Kürze, Einfachheit, ihr gleichförmiger Gang und besonders die Allgemeinheit, sich gewöhnlich um so entschiedener zeigen, je schwieriger und verwickelter die Untersuchungen sind. Inzwischen ist es doch immer von hoher Wichtigkeit, daß auch die geometrische Methode fortwährend kultiviert werde..... Dem vorliegenden Werk (der Verf.: gemeint ist die „Géométrie descriptive") *müssen wir insbesondere das Lob einer großen Klarheit ... beilegen, und daher das Studium desselben als eine kräftige Geistesnahrung empfehlen, wodurch unstreitig zur Belebung und Erhaltung des echten, in der Mathematik der Neuern sonst manchmal vermißten, geometrischen Geistes viel mit beigetragen werden kann."* – Die letztere Empfehlung findet in dieser Rezension abrundende Ergänzung durch die (auch didaktisch interessante) Bemerkung, *die geometrische Methode werde „beim frühern jugendlichen Studium unentbehrlich bleiben, um Einseitigkeit zu verhüten ... und den Einsichten eine Lebendigkeit und Unmittelbarkeit zu geben, welche durch die analytischen Methoden weit weniger befördert, mitunter eher gefährdet werden."*

Schließlich zitieren wir in diesem Zusammenhang zwei Stellen aus Briefen von Gauß, die seine Beurteilung neuartiger mathematischer Kalküle (zu deren Erfindern er sich auch selbst zählt) in ein klares Licht setzen (vgl. G.W. 8, S. 298):

„Überhaupt verhält es sich mit allen solchen neuen Kalküls so, daß man durch sie nichts leisten kann, was nicht auch ohne sie zu leisten wäre; der Vorteil ist aber der, daß, wenn ein solcher Kalkül dem innersten Wesen vielfach vorkommender Bedürfnisse korrespondiert, jeder, der sich ihn ganz angeeignet hat, auch ohne die gleichsam unbewußte Inspirationen des Genies, die niemand erzwingen kann, die dahin gehörigen Aufgaben lösen, ja selbst in so verwickelten Fällen gleichsam mechanisch lösen kann, wo ohne eine solche Hilfe auch das Genie ohnmächtig wird. So ist es mit der Erfindung der Differentialrechnung gewesen; so ist es auch (wenn auch in partielleren Sphären) mit LAGRANGEs *Variationsrechnung, mit meiner Kongruenzenrechung und mit* MÖBIUS' *Kalkül. Es werden durch solche Konzeptionen unzählige Aufgaben, die sonst vereinzelt stehen, und jedesmal neu Efforts (kleinere oder größere) des Erfindungsgeistes erfordern, gleichsam zu einem organischen Reich...."*

Eine rein mechanische Handhabung von Kalkülen, ohne ihren auf begriffliche oder geometrische Intuition gegründeten Ursprung im Auge zu behalten, hat Gauß jedoch als Verlust an

„Solidität“ mathematischen Arbeitens beklagt (vgl. G.W. 10,1, S. 434):

„Es ist der Charakter der Mathematik der neueren Zeit (im Gegensatz gegen das Altertum), daß durch unsere Zeichensprache und Namensgebungen wir einen Hebel besitzen, wodurch die verwickeltsten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reduziert werden. An Reichtum hat dadurch die Wissenschaft unendlich gewonnen, an Schönheit und Solidität aber ... eben so sehr verloren. Wie oft wird jener Hebel eben nur mechanisch angewandt, ... Ich fordere, man soll bei allem Gebrauch des Kalküls, ... sich immer der ursprünglichen Bedingungen bewußt bleiben ....“

(iii) Schließlich bleibt zu erwähnen: Gauß gibt in den Disquisitiones generales keinerlei Hinweise darauf, aufgrund welcher geometrischer Einsichten er das Theorema egregium entdeckt hat. Dessen Präsentierung als Korollar zu der rein rechnerisch (auf fünf Seiten) hergeleiteten Gauß-Gleichung (14) „überführt“ zwar den Leser aufs Glatteste, wirkt aber in ihrer geometrisch unmotivierten Art wie ein analytischer „deus ex machina“.

Diesen Effekt erfahren und bestätigen auch noch Studenten der Differentialgeometrie unserer Tage, wenn ihnen die Isometrie-Invarianz der Gaußschen (oder Riemannschen) Krümmung als Folge der Gauß-Gleichung serviert wird, obwohl die Herleitung der letzteren Gleichung heute (mittels kovarianter Ableitungen nach Levi-Civita) nurmehr den Charakter einer einfachen analytischen Übungsaufgabe hat.

Angesichts dieses Mangels an Informationen über die motivierenden geometrischen (Hinter-)Gründe wird man an einen Ausspruch von Gauß erinnert, den Sartorius von Waltershausen in seinem 1856 erschienenen Artikel „Gauß zum Gedächtnis“ berichtet (vgl. [24], S. 6, Z. 5 v.u.): *„Man dürfe einem Bauwerke, ..., nach seiner Vollendung nicht mehr das Gerüste ansehen.“* – Angesichts der oben erwähnten Gauß-Zitate zur „Form“-Frage wird man dies Wort von ihm aber nicht nur als eine ästhetische Devise zu verstehen haben: In der Tat ist es (insbesondere aufgrund des unten noch zu berichtenden Verhaltens von Gauß bei der Fertigstellung der Endfassung der Disquisitiones generales) viel wahrscheinlicher, daß Gauß in der „Gauß-Gleichung“ (14) einen inhaltlich derart vollendeten Ausdruck für die alleinige Determiniertheit der Gaußschen Krümmung durch die infinitesimalen Daten der inneren Metrik der Fläche (in Gestalt der „1-ten quadratischen Grundform“) sah, daß er die ihm bekannten geometrischen Argumente für die Isometrie-Invarianz der Gaußschen Krümmung dadurch als in den Schatten gestellt oder gar als störendes Gerüstwerk empfand. – Die Geschichte der Differentialgeometrie hat durch die Riemannsche Geometrie[20]) außerdem

[20]) Gauß hat am 10. 6. 1854 (8 Monate vor seinem Tod) noch den Habilitationsvortrag von B. Riemann zum Thema „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“ gehört, und zwar mit besonders engagiertem Interesse: Dazu zitieren wir aus einem Brief Riemann's vom 28. 12. 1853 (vgl. [21], S. 547): »*... ich habe Anfang Dezember meine Habilitationsschrift* („Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe“, der Verf.) *abgeliefert und mußte dabei drei Themata zur Probevorlesung vorschlagen, von denen die Fakultät eines wählt. Die beiden ersten hatte ich fertig und hoffte, daß man eins davon nehmen würde; Gauß aber hatte das dritte* („Über die Hypothesen ...“, der Verf.) *gewählt, und so bin ich wieder etwas in der Klemme, da ich dies noch ausarbeiten muß.*« So dankt man also der Themenauswahl durch Gauß, daß Riemann seine Ideen zur „Riemannschen Geometrie“ schon im Frühjahr 1854 sammeln mußte! Dedekind berichtet dazu in seinem „Lebenslauf von B. Riemann“ (vgl. [21], S. 549): Gauß habe entgegen dem üblichen Brauch von den drei vorgeschlagenen Themen nicht das erste, sondern das dritte gewählt, weil er begierig war zu hören, wie ein so schwieriger Gegenstand von einem so jungen Manne behandelt werden würde; nun setzte ihn die Vorlesung, welche alle seine Erwartungen übertraf, in das größte Erstaunen, und auf dem Rückwege von der Fakultätssitzung sprach er sich gegen[über] (dem ihm befreundeten Physiker, der Verf.) Wilhelm Weber mit höchster Anerkennung und mit einer bei ihm seltenen Erregung über die Tiefe der von Riemann vorgetragenen Gedanken aus.“

eine späte Rechtfertigung für diese analytische Akzentuierung nachgereicht, insofern sie die Trächtigkeit und zentrale Stellung der Gauß-Gleichung in noch stärkerem Maße (als in der Differentialgeometrie der Flächen des $\mathbf{E}^3$) hat evident werden lassen: Dennoch bleibt die Frage nach dem geometrischen „woher"?

Glücklicherweise wirft die Entstehungsgeschichte der Disquisitiones generales (wie sie sich aus dem erst spät gesichteten Nachlaß von Gauß darstellt) einiges Licht in dies Dunkel. Darüber soll nun noch berichtet werden:

Zur Entstehungsgeschichte der Disquisitiones generales und zur Ideengeschichte des Theorema egregium

(i) Der Ausgangspunkt für Gauß' Arbeiten zur Differentialgeometrie findet sich einerseits in seiner schon frühen (allein um „Wahrheitsfindung" bemühten Beschäftigung mit den Grundlagen der Geometrie (Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms bei Euklid), andererseits aber auch in der (ihm beruflich als Direktor der Göttinger Sternwarte abgeforderten) Beschäftigung mit der Geodäsie. Ein gemeinsamer Treffpunkt dieser beiden Hauptwege seines geometrischen Interesses ist zweifelsfrei die Trigonometrie (euklidische, sphärische, hyperbolische und die der krummen Flächen) gewesen und hier insbesondere der Satz über die Winkelsumme im Dreieck oder in einem Polygon dieser Geometrien. Seine ersten fundamentalen Einsichten dazu datiert Gauß später bereits in sein 17. Lebensjahr, wie man aus seinem Brief vom 2.10.1846 an Gerling erfährt (vgl. G.W. $\underline{8}$, S. 266):

„Der Satz, den Ihnen Hr. SCHWEIKART erwähnt hat, daß in j e d e r Geometrie die Summe aller äußern Polygonwinkel von 360° *um eine Größe verschieden ist,..., welche dem Flächeninhalt proportional ist, ist d e r e r s t e gleichsam a n d e r S c h w e l l e l i e g e n d e S a t z d e r T h e o r i e* (gesperrt vom Verf.), *den ich schon im Jahre* 1794 *als notwendig erkannte."*

Für die sphärische Trigonometrie ist dieser Satz vom Winkelexzess (vgl. oben (34), der „Satz von Gauß-Bonnet") sicherlich um diese Zeit bereits allgemein bekannt gewesen. Gauß spricht hier – wie der Bezug auf Schweikart zeigt (der eine „hyperbolische" Geometrie untersucht hatte), jedoch wohl den hyperbolischen Fall an.

Seine Arbeiten zur Geodäsie bringen ihn (in der Zeit von 1812–1816) zum Studium der Geodätischen auf dem elliptischen Rotations-Sphäroid und zur Frage der Bestimmung „aller" konformen Karten für allgemeine krumme Flächen, Karten, welche er für die Zwecke der Geodäsie am bedeutendsten hält (vgl. [24], S. 91, Z. 7): *„Sie haben ganz Recht"*, schreibt Gauß am 11.12.1825 an Hansen, *„daß bei allen Kartenprojektionen die Ähnlichkeit der kleinsten Teile die w e s e n t l i c h e Bedingung ist, die man nur in ganz spezifischen Fällen und Bedürfnissen hintansetzen darf."* –

Aus einem Brief vom 5.7.1816 an Schumacher (vgl. G.W. $\underline{8}$, S. 370) erfährt man: *„Mit Lindenau habe ich auch über eine Preisfrage konferiert, die in der neuen Zeitschrift ... aufgegeben werden soll. Mir war eine interessante Aufgabe eingefallen, nämlich:*

»a l l g e m e i n eine gegebene Fläche so auf einer andern (gegebenen) zu projizieren (abzubilden), daß das Bild dem Original in den kleinsten Teilen ähnlich werde.« (53)

Ein spezieller Fall ist, wenn die erste Fläche eine Kugel, die zweite eine Ebene ist. Hier sind die stereographische und die merkatorische Projektionen partikuläre Auflösungen. Man will aber die allgemeine Auflösung, worunter alle partikulären begriffen sind, für jede Art von Flächen.“

Diese von Gauß für eine neue astronomische Zeitschrift vorgeschlagene Preisaufgabe war von deren Redaktion jedoch nicht gewählt worden[21]). Sein ehemaliger Schüler und Freund Schumacher[18]), dem er von diesem Problem berichtet hatte, benutzte daher die erste sich ihm bietende Gelegenheit und veranlaßte, daß die Kopenhagener Sozietät der Wissenschaften für 1821 die Preisfrage (53) (siehe oben) stellte. Nachdem keine Abhandlung eingegangen war, wurde die Aufgabe für 1822 erneuert. Als Schumacher am 4.6.1822 Gauß davon benachrichtigte, antwortete Gauß am 10.6.1822: *„Es tut mir leid, die Wiederholung Ihrer Preisfrage erst jetzt zu erfahren…“*. Am 25.11.1822 fragt er bei Schumacher an, bis wann die Preisarbeit eingesandt werden müsse, und nachdem dieser erwidert hatte, bis Ende des Jahres, reicht ihm Gauß am 11.12.1822 seine Bearbeitung ein (vgl. dazu [24], S. 90):

So ist die erste bedeutendere Arbeit von Gauß zur Flächentheorie eine (sogar unter Terminzwang gefundene) Antwort auf diese letztlich von ihm selbst gesetzte Herausforderung!

Diese Preisarbeit erscheint erst 1825 in den „Astronomischen Abhandlungen“ unter dem Titel:

> *„Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird“*

und Gauß fügt diesem Titel als Begleitwort hinzu:

> *„Ab his via sternitur ad maiora“*,

als selbstbewußte[22]) Ankündigung eines ihm anläßlich dieser Arbeit gelungenen Durchbruchs. Der „hiermit zu Größerem geebnete Weg“ ist zweifelsfrei der Weg in Richtung der „Inneren Differentialgeometrie“: Zwei Tage nämlich, nachdem er seine Beantwortung der Preisfrage abgeschickt hatte, fertigt Gauß am 15.12.1822 eine private Aufzeichnung an mit dem Titel *„Stand meiner Untersuchung über die Umformung der Flächen“* (vgl. G.W. 8, S. 374–384), in der er ein einziges Resultat heraushebt (vgl. G.W. 8, S. 381, Formel 25): Ist das Linienelement der krummen Fläche (nach Wahl einer konformen Karte) gegeben als $\sqrt{m^2(du^2+dv^2)}$, so kann ihre Gauß'sche Krümmung K berechnet werden als

$$K = -\frac{1}{m^2}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right). \tag{54}$$

[21]) Gauß besaß vermutlich schon um diese Zeit (1816?) einen Lösungsansatz für diese Aufgabe (53) (vgl. G.W. 8, S. 371, S. 372, Z. 2 v. u.).

[22]) Die Worte „Et his principiis via ad maiora sternitur“ hatte I. Newton ([20], S. 244) seiner Abhandlung „De quadratura curvarum“ beigefügt, in der er ältere Untersuchungen publizierte, die ihn zur Fluxionsrechnung (d. h. zu seiner Version der Differentialrechnung) geführt hatten.

Dies ist die für den Spezialfall einer konformen Karte ausgeschriebene Gauß-Gleichung der Disquisitiones generales (siehe oben (14), eine später in der Differentialgeometrie viel gebrauchte, nützliche Formel, die leider in die Disquisitiones generales nicht mehr übernommen wurde), und Gauß zieht daraus die Folgerung: „... *das Krümmungsmaß behält denselben Wert bei allen Umformungen der Fläche, die deren Linienelement* $\sqrt{m^2(du^2+dv^2)}$ *unverändert lassen.*" [Da das hierin enthaltene Faktum der Isometrie-Invarianz von K ihm selbst bereits seit 1816 aufgrund geometrischer Argumente bekannt war (siehe unten (56)), ist der von Gauß hier erlebte „Durchbruch" wohl allein zu beziehen auf den Gewinn der expliziten analytischen „Anbindung" von K an die erste Grundform durch die Formel (54).]

Daß Gauß durch diese Arbeit zu weiteren Untersuchungen gedrängt wurde, erfährt man aus seinem Begleitschreiben zu der eingereichten Preisarbeit (vgl. G.W. 4, S. 191): „*Der Verfasser dieser Abhandlung ... bedauert, daß der letztere Umstand* (angesprochen wird hier seine späte Kenntnisnahme der wiederholt gestellten aber unbearbeitet gebliebenen Preisaufgabe, der Verf.) *ihn genötigt hat, sich fast nur auf das Wesentliche ... zu beschränken, da er ohne die Nähe des Schlußtermins gern die Entwicklung einiger Nebenumstände noch weiter verfolgt ... haben würde, welches er sich nun für eine andere Zeit und für einen anderen Ort vorbehalten muß.*"

(ii) Von 1821 bis August 1825 ist Gauß durch mühsame und zeitraubende geodätische Messungen im Gelände erheblich in Anspruch genommen.

Er schreibt darüber an Olbers (vgl. [23], S. 29): „*Ich sehe nicht ohne Mißmut auf meine fünfjährigen Messungen zurück*" und an anderer Stelle in Bezug auf noch ausstehende Geländemessungen im Sommer 1825 (vgl. [23], S. 29): „*Ich wünsche sehr, alle Arbeiten dieser Art, die noch rückständig sind, in einem Stück zu vollenden, um dann die Lebensjahre, die der Himmel mir noch schenken wird, ungestört auf Arbeiten im Studierzimmer verwenden zu können.*"

So kommt es erst danach zu einem erneuten Anlauf in Richtung der Flächentheorie. Gauß berichtet darüber an Olbers am 9.10.1825 (vgl. G.W. 8, S. 397) und schreibt an Schumacher am 21.11.1825 (vgl. G.W. 8, S. 400):

„*Ich habe seit einiger Zeit angefangen, einen Teil der allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen wieder vorzunehmen, die die Grundlage meines projektierten Werks über Höhere Geodäsie werden sollen. Es ist ein ebenso reichhaltiger als schwieriger Gegenstand, vor dem ich jetzt zu anderen Arbeiten gar nicht kommen kann. Ich finde leider, daß ich dabei s e h r w e i t werde ausholen müssen, da auch das Bekannte in einer andern, den neuen Untersuchungen anpassenden Form entwickelt werden muß. Man muß den Baum zu allen seinen Wurzelfäden verfolgen, und manches davon kostet mir wochenlanges angestrengtes Nachdenken. Vieles davon gehört sogar in die Geometria situs, ein noch fast ganz unbearbeitetes Feld.*"

In Gauß' Nachlaß fand sich auch der (bereits recht umfangreiche) Entwurf für dies differentialgeometrische Kapitel seines geplanten Werkes zur Höheren Geodäsie unter dem Titel

„*Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen*", (55)

den er in den letzten drei Monaten des Jahres 1825 verfaßt hatte. Daraus und aus weiteren (von P. Stäckel mit großer Sorgfalt aus dem Nachlaß von Gauß zusammengetragenen) Aufzeichnungen ergeben sich bereits folgende

(iii) Datierungen der Entdeckungen einiger der neuen Begriffe und Sätze aus den späteren Disquisitiones generales:

1.) Begriff der *sphärischen Abbildung* (vgl. (7)),
2.) Begriff[23]) der *Gauß'schen Krümmung* (vgl. (8)),
3.) Das Resultat: $K = \varkappa_1 \varkappa_2$, (vgl. (12)).
} Zwischen 1799 und 1813, (vgl. G.W. 8, S. 367, S. 369).

4.) *Isometrie-Invarianz der Totalkrümmung* (vgl. (16)): Gegen 1816, (vgl. G.W. 8, S. 372).

Diese relativ frühe Entdeckung wird zum Schrittmacher und „Leitmotiv“ der folgenden Untersuchungen von Gauß über die Differentialgeometrie der krummen Flächen und er apostrophiert es selbst als das „schöne Theorem“. Wir formulieren es hier noch einmal explizit in strenger Anlehnung an Gauß, der 1816 noch nicht den Namen „Totalkrümmung“ verwandte (vgl. G. W. 8, S. 372):

Das „schöne Theorem“ (Gauß; um 1816):
Nimmt eine krumme Fläche, auf der eine Figur fixiert ist, verschiedene Gestalten in $\mathbb{E}^3$ an, so muß der Flächeninhalt des sphärischen Bildes jener Figur bei allen möglichen dieser Gestalten (der betrachteten Fläche) stets der gleiche sein. (56)

Zusatz: Durch den in (8) beschriebenen Grenzübergang folgt aus (56) trivialerweise auch das Theorema egregium (vgl. (15)), d.h. die Isometrie-Invarianz der punktweise definierten Gauß'schen Krümmung.

5.) Herleitung der *„Gauß-Gleichung“* (d.h. Berechnung der Gaußschen Krümmung K allein aus der ersten Grundform, falls letztere gegeben ist)
a) *in konformen Koordinaten,* (vgl. (54)): 1822 (vgl. G.W. 8, S. 381),
b) *in geodätischen Polarkoordinaten,* (vgl. (32)): 1825 (vgl. G.W. 8, S. 442).

6.) *Winkelvergleichssatz für geodätische Dreiecke,* (vgl. (35) und Legendres Resultat (39)): 1825 (vgl. G.W. 8, S. 399).

7.) *Winkelsumme kleiner geodätischer Dreiecke* (vgl. (34), = *„Satz von Gauß-Bonnet“*): 1825 (vgl. G.W. 8, S. 435).

Bemerkung: Für das „schöne Theorem“ seiner Notiz vom Jahre 1816 (s.o. (56)) hat Gauß dort keinerlei Beweis gegeben oder angedeutet. Im Fragment (55) von 1825 findet sich ein Beweis von (56) (siehe unten (iv)), der den Satz (34) vom Winkelexzess in kleinen geodätischen Dreiecken bereits investiert. Es ist deshalb sehr wahrscheinlich, daß Gauß bereits 1816 den Winkelexzess-Satz (34), d.h. den „Satz von Gauß-Bonnet“ für kleine geodätische Dreiecke, als die „Ur-Form“ von (56) kannte. Diese Vermutung wird gestützt durch den belegbaren Kenntnisstand von Gauß über Winkeleigenschaften von Dreiecken in der hyperbolischen Geometrie aus dem Jahre 1816, wo er bereits den Satz kennt, daß in der hyperbolischen Geometrie Dreiecke mit gleichen Winkeln stets kongruent sind (mit einer interessanten Spekulation über eine universelle Längenmaßeinheit, falls der räumliche Kosmos hyperbolisch ist, vgl. G.W. 8, S. 168), bzw. aus dem Jahre 1819, wo er für die hyperbolische Geometrie feststellt (vgl. G.W. 8, S. 182, Z. 18 v. o.): *„Der Defekt der Winkelsumme im ebenen Dreieck gegen 180° ist z. B. nicht bloß desto größer, je größer der Flächeninhalt ist, sondern ihm genau propor-*

[23]) Der Name „Krümmungsmaß“ für die durch (8) definierte Zahl tritt nachweisbar bei Gauß erst in einer privaten Aufzeichnung vom 13.12.1822 auf (vgl. G.W. 8, S. 381), während Gauß mit der Definition (8) als einem geometrisch bedeutsamen Begriff bereits viel früher umgegangen ist.

tional"[24]). Gauß hat seine persönliche Kenntnis dieses letzteren *„gleichsam an der Schwelle* (der hyperbolischen Geometrie, der Verf.) *liegenden Satzes*" in späten Jahren (1846) sogar bis ins Jahr 1794 zurückdatiert (vgl. G.W. 8, S. 266)!

8.) Allgemeines *„Gauß-Lemma"* (vgl. (22), (23), (24)): 1825 (vgl. G.W. 8, S. 439).

9.) Herleitung der *„Gauß-Gleichung"* (vgl. (14)) (d.h. Berechnung der Gaußschen Krümmung K allein aus der ersten Grundform, falls letztere *in beliebigen Koordinaten* gegeben ist): 1826 (vgl. [24], S. 97, Z. 5).

Ein Blick auf diese Zeittafel zeigt, daß die deduktive Anordnung der Begriffe und Sätze in den Disquisitiones generales in wesentlichen Punkten eine Umkehrung der zeitlichen Reihenfolge ihrer Entdeckungen darstellt! Dies kann nicht Wunder nehmen, denn Gauß hat die in allgemeinen Koordinaten formulierte „Gauß-Gleichung" (14), jenen zentralen Angelpunkt seiner Darstellung in den Disquisitiones generales, bis Ende 1825 sicher nicht gekannt. Aus diesem Grunde gibt Gauß in dem (nur im Nachlaß vorgefundenen) Fragment (55) einen völlig anderen (dafür aber den geometrischen Ursprung dieser Erkenntnis erhellenden)

(iv) Beweis für das „Theorema egregium" (= Isometrie-Invarianz der Gauß'schen Krümmung) ohne Benutzung der Gauß-Gleichung" (14) (vgl. G.W. 8, S. 435/436), den wir nun noch skizzieren:

Ausgangspunkt dieses Beweises ist i.w. der Satz (34) über den „Winkelüberschuß kleiner geodätischer Dreiecke über zwei Rechte", bei dem allerdings die diesen Überschuß messende Totalkrümmung des Dreiecks nicht (wie in (34)) als das Integral über die Gauß'sche Krümmung, sondern direkt als „orientierter" Flächeninhalt des sphärischen Bildes definiert wird. Wir zitieren hier diesen Satz noch einmal in freier „Übersetzung" derjenigen Formulierung, die Gauß ihm in dem Fragment (55) gibt (vgl. G.W. 8, S. 435):

Die Summe der Winkel eines (kleinen) geodätischen Dreiecks Δ einer krummen Fläche des $\mathbb{E}^3$ ist gleich der Summe von π und dem orientierten Flächeninhalt des sphärischen Bildes von Δ, wobei dieser orientierte Inhalt positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem das sphärische Bild von Δ von seiner Begrenzung im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne umlaufen wird wie Δ von seiner Begrenzung. (57)

Das Resultat (57) war in dem Spezialfall, daß es sich bei der Fläche um eine ebene bzw. in die Ebene abwickelbare oder um eine sphärische Fläche handelte, bereits allgemein bekannt. Gauß hat das zu (57) analoge Resultat für die hyperbolische Geometrie bereits 1794 für sich selbst besessen (vgl. G.W. 8, S. 266) und 1819 auch Gerling brieflich mitgeteilt (vgl. G.W. 8, S. 182). Es ist deshalb gut vorstellbar, daß Gauß bei diesem grundlegenden Kenntnisstand, sowie aufgrund seiner reichen

[24]) Der Brief an Gerling vom 16.3.1819, aus dem dies Zitat stammt, ist ein wichtiges Dokument über Gauß' Kenntnisstand bzgl. der hyperbolischen Geometrie um 1819. Passagen aus diesem Brief (vgl. insbesondere G.W. 8, S. 182, Z. 10ff) mögen Ursache für die (nicht sicher beweisbare) Vermutung gewesen sein, irdische oder astronomische Winkelmessungen von Gauß seien von ihm als „Test" für die Gültigkeit oder Ungültigkeit der euklidischen Geometrie im uns umgebenden Raum ausgeführt worden.

differentialgeometrischen Erfahrungen innerhalb der Geodäsie (mit den Geodätischen und der Trigonometrie des Sphäroids, aber auch mit Abbildungs- und Verbiegungsfragen) aus den Jahren 1812 bis 1822, zu einer geometrisch-intuitiven „Einsicht“ über die allgemeine Gültigkeit von (57) gelangt ist.

Gauß skizziert in dem Nachlaß-Fragment (55) einen (mit geometrischen Fallunterscheidungen operierenden) Beweis für (57), über den er jedoch selbst nicht recht glücklich gewesen zu sein scheint, wie folgende Bemerkung von ihm zeigt (vgl. G.W. 8, S. 435): *„Der Beweis wird in der Form einiger Modifikation und Erläuterung bedürfen, wenn ...“* einer der zu unterscheidenden geometrischen Fälle vorliegt.

Auch mit dem Begriff des „orientierten Flächeninhalts“ in der von ihm in (57) benutzten Form hatte sich Gauß zwar durchaus intensiv auseinandergesetzt (vgl. G.W. 8, S. 398, Z. 2 v.u.), betrachtete aber seine Überlegungen dazu sicher noch nicht als „ausgereift“. Jedenfalls fehlt bei ihm die uns heute geläufige einfache analytische Beschreibung:

$$\textit{Orientierter Flächeninhalt des sphärischen Bildes von } \Delta := \int_{\Delta} \zeta^{*}\sigma_2, \tag{58}$$

wobei ζ die sphärische Abbildung (7) der betrachteten krummen Fläche und σ_2 die Flächeninhaltsform der Sphäre S^2 in $\mathbb{E}^3$ ist.

Der geometrische (und historisch ursprüngliche!) Beweis von Gauß für das Theorema egregium (15) liest sich im Fragment (55) folgendermaßen: Aus dem zuvor bewiesenen Winkelexzeß-Satz (57) für geodätische Dreiecke schließt Gauß zunächst auf die Gültigkeit des Winkelexzeß-Satzes für geodätische Polygone beliebiger Seitenzahl $n \geqq 3$:

Die Summe aller Winkel eines kleinen geodätischen Polygons Π *von* n *Seiten einer krummen Fläche* M *des* $\mathbb{E}^3$ *ist gleich* $(n-2)\pi$ *plus dem orientierten Flächeninhalt* $\int K(\Pi)$[25]) *des sphärischen Bildes von* Π *unter der sphärischen Abbildung von* M, (59)

und er argumentiert dann inhaltlich (nicht wörtlich!) weiter so (vgl. G.W. 8, S. 435, Z. 3 v.u. und S. 436):

Unter einer isometrischen Abbildung („Abwicklung“) $f: M \to M'$ zweier krummer Flächen M und M′ des $\mathbb{E}^3$ aufeinander bleiben die Längen von Kurven der Flächen erhalten. Deshalb gehen insbesondere Kürzeste von M in Kürzeste von M′ über. Aus dem gleichen Grunde geht auch die geodätische ε-Nachbarschaft D_ε eines Punktes A in M in die geodätische ε-Nachbarschaft D'_ε des Punktes $A' := f(A)$ in M′ über, d.h. $D'_\varepsilon = f(D_\varepsilon)$, und aus der Isometrie-Eigenschaft von f folgt daher auch die Gleichheit ihrer Flächeninhalte:

$$\operatorname{area}(D_\varepsilon) = \operatorname{area}(D'_\varepsilon). \tag{60}$$

Andererseits bleiben unter der Isometrie f auch die Winkel zwischen einander schneidenden Kurven der Flächen erhalten. Hieraus und aus (59) folgt sofort:

Der orientierte Flächeninhalt $\int K(\Pi)$ *des sphärischen Bildes eines geodätischen Polygons* Π *auf* M *ist gleich dem orientierten Flächeninhalt* $\int K'(\Pi')$ *des sphärischen Bildes des* Π *(unter der Isometrie* f*) entsprechenden geodätischen Polygons* $\Pi' := f(\Pi)$ *auf der Fläche* M′ [25]). (61)

Durch Approximation der ε-Nachbarschaft D_ε von A mittels (einbeschriebener) geodätischer Polygone der Fläche M folgt sodann vermöge (61) auch:

Der orientierte Flächeninhalt $\int K(D_\varepsilon)$ *des sphärischen Bildes von* D_ε *unter der sphärischen Abbildung von* M *ist gleich dem orientierten Flächeninhalt des sphärischen Bildes von* D'_ε *unter der sphärischen Abbildung der Fläche* M′ [25]). (62)

Aus (60), (62) folgt daher durch Grenzübergang für $\varepsilon \to 0$:

$$K(A) \underset{(8)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int K(D_\varepsilon)}{\operatorname{area}(D_\varepsilon)} \underset{(60),(62)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int K'(D'_\varepsilon)}{\operatorname{area}(D'_\varepsilon)} \underset{(8)}{=} K'(A')^{25)},$$

d. h. die Gaußschen Krümmungen der zueinander isometrischen krummen Flächen M und M′ des $\mathbb{E}^3$ stimmen in den unter der Isometrie einander entsprechenden Punkten A und A′ überein: Das ist das Theorema egregium!

(v) Diesen Beweis (mit seinen so eindrucksvollen geometrischen Schlüssen, den wir der Darstellung im Fragment (55) gerade nachgezeichnet haben) hat Gauß leider nie publiziert! Schuld daran trägt einerseits sicher seine oben von uns schon angedeutete kritische Selbsteinschätzung seines eigenen Beweis-Entwurfs für (57) unter Einschluß des dabei benötigten (von ihm nicht mit letzter analytischer Strenge definierten) Begriffs des „orientierten Flächeninhalts des sphärischen Bildes" einer Figur auf einer krummen Fläche[26]). Darüber hinaus gibt es sicher noch einen weiteren Grund: Im Anschluß an den oben (vgl. (iv)) referierten Beweis von Gauß für das Theorema egregium folgen im Fragment (55) nur noch das „Gauß-Lemma" (vgl. (23), (24)) sowie die für geodätische Polarkoordinaten spezialisierte „Gauß-Gleichung" (vgl. (32)); damit bricht die Niederschrift zum Titel (55) „Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen" abrupt ab. [Dies ist etwa auf Ende (Dezember?) 1825 zu datieren.] Gauß muß hier erkannt haben, daß aus der zuletzt gewonnenen analytischen Aussage (32) das Theorema egregium unmittelbar folgt, wenn man noch zusätzlich weiß, daß – bei Isometrien zweier krummer Flächen des $\mathbb{E}^3$ aufeinander – geodätische Polarkoordinaten der einen Fläche, stets wieder in geodätische Polarkoordinaten der anderen Fläche übergehen: Dies ist in der Tat (und zwar viel einfacher als manche der

[25]) Hier benutzen wir „∫K" als ein (nicht weiter in „∫" und „K" aufzulösendes, aber in dieser Verbindung recht suggestives!) Symbol für die reellwertige Mengenfunktion, die jeder durch eine Kurve berandeten kompakten Teilmenge D der krummen Fläche M den „orientierten Flächeninhalt" des sphärischen Bildes von D unter der sphärischen Abbildung von M zuordnet, wobei die Vorzeichenfestlegung analog der Erklärung von Gauß in (57) durch Vergleich der Rand-Umlaufssinne erfolgt.

[26]) Gauß urteilte über nicht perfekte Beweise äußerst hart: In seinem Brief an Olbers vom Juli 1828 sagt er im Zusammenhang mit der Frage nach der Existenz geradliniger Erzeugender für in die Ebene abwickelbare Flächen des $\mathbb{E}^3$ (vgl. G.W. 8, S. 444, Z. 2 v. u.): *„Dieses Vorhandensein von solchen geraden Linien ist in allen mir bekannten angeblichen Beweisen, vor dem meinigen, bloß erschlichen ..."*.

geometrischen Argumentationen seines Beweises von (57) und (62)!) sofort aus der Längen- und Winkel-Treue isometrischer Abbildungen einzusehen. Damit scheint für Gauß sein oben in (iv) referierter Beweis endgültig „entthront“ und abgeschrieben gewesen zu sein.

Im Hinblick auf den Artikel 21 (vgl. G.W. 4, S. 248, Z. 7–5 v.u.) der späteren Disquisitiones generales (für den es in dem Fragment (55) keinerlei Vorläufer gibt!) ist sogar der Schluß erlaubt, daß Gauß zu dieser Zeit die grundsätzliche Möglichkeit erkannte, durch Umrechnung von einer lokalen Karte der Fläche auf eine andere solche die Koordinaten der ersten Grundform E, F, G (vgl. (13)) in einer Karte vermöge der analogen Koordinaten E′, F′, G′ in der anderen Karte auszudrücken. Damit mußte die für die speziellen geodätischen Polarkoordinaten gewonnene Gauß-Gleichung (32) grundsätzlich in eine Gleichung vom Typ (14) umzurechnen sein: Auf diese Weise dürfte Gauß auch die explizite Gestalt (14) der Gauß-Gleichung für allgemeine Koordinaten der Fläche gefunden haben. Diese Umrechnung, sowie der endgültige, in die Disquisitiones generales eingegangene Beweis von (14), der direkt in den vorgegebenen allgemeinen Koordinaten rein rechnerisch „durchgezogen“ wird, hat Gauß sicher erst 1826 gefunden: Die zentrale Stellung und große „Schlagkraft“ dieses Instruments erkennend, hat Gauß seine bereits schon recht ausführlich dargestellten Ergebnisse zur Flächentheorie als das Fragment (55) liegen lassen und hat eine neue, ganz auf die Gauß-Gleichung (14) abgestimmte Darstellung dieser Resultate in Angriff genommen. Aus seinem Brief an Bessel vom 20.11.1826 erfährt man dann (vgl. G.W. 9, S. 362, Z. 19 v.o.), daß er seine ursprüngliche Absicht, die Untersuchungen zur Differentialgeometrie der krummen Flächen in ein Werk über Höhere Geodäsie mit einzubeziehen, aufgibt und ihnen eine eigene Abhandlung widmen will. Nunmehr erscheint ihm der auf die Gaußsche Krümmung bezogene Teil dieser Untersuchungen derart ausgereift[27]), daß er ihn zügig für die Publikation vorbereitet: So entstehen die „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ als eine Art komprimierter Forschungsbericht über seine flächentheoretischen Untersuchungen, in welchem er nicht nur die Darstellung völlig auf die nun an den Anfang gesetzte Gauß-Gleichung (14) umstellt, sondern auch alle elementaren Teile (über Kurvenkrümmungen, Normalschnittkrümmungen bei Flächen etc.) aus der ersten Niederschrift zum Titel (55) inhaltlich unberücksichtigt läßt.

So realisieren die Disquisitiones generales überzeugend jenen Leitspruch, den Gauß in das von ihm benutzte Siegel hatte gravieren lassen (vgl. [24], S. 6, Z. 3 v.u.); es zeigt einen Baum mit wenigen Früchten und trägt die Umschrift

„Pauca, sed matura“:

Das Nachdenken und Arbeiten von mehr als fünfzehn Jahren über die Geometrie der Flächen erfährt hier eine Zusammenfassung und zugleich eine Wendung „zu neuen

[27]) Seine im Nachlaß gefundenen, ebenfalls aus der Zeit von 1822 bis 1825 stammende (z.T. flüchtigen) Notizen zur „Seitenkrümmung“ (= geodätische Krümmung) von Kurven auf einer krummen Fläche des $\mathbf{E}^3$ (vgl. G.W. 8, S. 386–395) hatten einen damit vergleichbaren Stand der Durchdachtheit noch nicht erreicht und blieben daher von der Aufnahme in die Disquisitiones generales ausgeschlossen: Hier ist ihm F. Minding mit einer Publikation (vgl. [18], 1830) zuvorgekommen.

Ufern", die an Dichte und kompositorischer Schönheit ihrer Darstellung sowie an inhaltlicher Trächtigkeit und dynamischer Anregungskraft ihrer Ideen[28]) in der mathematischen Literatur ihresgleichen suchen kann.

Geben wir nun noch einen kurzen Überblick über

Einige bedeutende Themen, Resultate und Entwicklungen der Differentialgeometrie der letzten 150 Jahre.

Selbst eine nur andeutende Skizze hierüber ist nicht möglich, ohne zuvor an folgende wichtigen Grundbegriffe der Differentialgeometrie (die – i. w. nach Gauß – etwa ab 1854 eingeführt wurden) erinnert zu haben:

1.) n-*dim Riemannsche Mannigfaltigkeiten* M (die hier stets als zusammenhängend vorausgesetzt werden!) mit ihrer *inneren Metrik* (definiert durch das Infimum der Längen verbindender stetig differenzierbarer Wege) und ihrer *Schnittkrümmung*(sfunktion) $\varkappa^M$, die von B. Riemann im Jahre 1854 mittels des Begriffs der (intrinsecen!) Gauß'schen Krümmung[29]) eingeführt wurde (vgl. [21], S. 272–287), sowie isometrische Immersionen und Isometrien Riemannscher Mannigfaltigkeiten.

2.) *Lie Gruppen* sowie differenzierbare Operationen von solchen auf Mannigfaltigkeiten [S. Lie und F. Klein (ab 1869), E. Cartan].

3.) *Levi-Civita-Parallelverschiebung* L_c für Vektoren längs differenzierbarer Wege $c:[a,b] \to M$ in Riemannschen Mannigfaltigkeiten M (T. Levi-Civita, 1917) als

$$\textit{lineare Isometrie } L_c: T_{c(a)}M \to T_{c(b)}M \tag{63}$$

des Tangentialraumes an M im Anfangspunkt auf den im Endpunkt von c.

4.) *Topologische Begriffe*, wie z. B.: Zusammenhang, Kompaktheit, Orientierbarkeit, einfacher Zusammenhang, Fundamentalgruppen und Überlagerungen, Homologie und Cohomoloie von Mannigfaltigkeiten, (etwa ab 1890. H. Poincaré, H. Hopf, H. Whitney, S. Eilenberg, ...).

5.) *Metrische Vollständigkeit* (M. Fréchet, F. Hausdorff, 1914) und *geodätische Vollständigkeit* (H. Hopf und W. Rinow, 1931) von Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Literatur-Empfehlung hierzu: [2], [4], [9], [15], [22], [27]. Wo wir kein Literatur-Zitat angeben, konsultiere man die Bibliographien von [15], [22], [27].

Auf der Basis dieser Grundbegriffe erwähnen wir nun („pars pro toto") folgende Themen der (inneren) Differentialgeometrie:

---

[28]) Es ist vor allem diese auf „Evolution" angelegte Komponente der Disquisitiones generales, die den („statisch" oder „fertig-abgeschlossen" wirkenden) Titel eines „Gebäudes", den P. Stäckel diesem Werk von Gauß beilegte, unseres Erachtens so inadäquat erscheinen läßt.

[29]) Ist $\sigma \in G_2(T_pM)$, d. h. σ ein 2-dim Untervektorraum des Tangentialraumes T_pM an M im Punkte $p \in M$, so definiert Riemann als „(Schnitt-)Krümmung $\varkappa^M(\sigma)$ von σ (in M)„ den Wert der Gauß'schen Krümmung im Punkte p derjenigen 2-dim Fläche in M, die von den Geodätischen von M durch p, welche tangential zu σ sind, aufgespannt wird. Die Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt „von konstanter (Schnitt-)Krümmung $C\ (\in \mathbb{R})$" genau dann, wenn für alle $p \in M$ und alle $\sigma \in G_2(T_pM)$ gilt: $\varkappa^M(\sigma) = C$.

(i) Das Umkehrproblem zum „Theorema egregium“, d.h. zur Isometrie-Invarianz der Gaußschen, oder allgemeiner der Riemannschen Krümmung:

Aufgrund ihrer Definition[29]) und des Theorema egregium von Gauß ist die Schnittkrümmung Riemannscher Mannigfaltigkeiten unter Isometrien invariant, genauer:

Ist $f: M \to M'$ eine differenzierbare Immersion gleichdimensionaler Riemannscher Mannigfaltigkeiten ($\dim M \geqq 2$), so muß – damit f isometrisch ist – notwendigerweise gelten:

$$\varkappa^{M'}\big(f_*(\sigma)\big) = \varkappa^{M}(\sigma) \textit{ für alle } p \in M \textit{ und alle } \sigma \in G_2(T_p m)\,^{29}).$$

Dies Resultat suggeriert unmittelbar folgendes dazu „inverse“

P r o b l e m : Inwiefern implizieren „Übereinstimmungs-Voraussetzungen“ über die Krümmungsfunktionen gleichdimensionaler Riemannscher Mannigfaltigkeiten bereits deren Isometrie?

Wir erwähnen zu diesem Problem drei prominente Resultate:

a) *Je zwei* n-*dim* ($n \geqq 2$) *Riemannsche Mannigfaltigkeiten von g l e i c h e r k o n s t a n t e r Schnittkrümmung sind lokal isometrisch* (B. Riemann 1854, vgl. dazu [27], S. 59 Cor. 2.3.8 und S. 69, 2.4.11).

b) *Jede einfach-zusammenhängende, vollständige* n-*dim* ($n \geqq 2$) *Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung* $C (\in \mathbb{R})$ *ist (global!) isometrisch zum* n-*dim euklidischen Raum* $\mathbb{E}^n$ (falls $C = 0$), *bzw. isometrisch zur* n-*dim Sphäre vom Radius* $\sqrt{C^{-1}}$ *des* $(n+1)$-*dim euklidischen Raumes* (falls $C > 0$), *bzw. isometrisch zum* n-*dim hyperbolischen Raum, in welchem die Winkelsumme jedes geodätischen Dreiecks* Δ *gleich* $\pi + C \cdot \operatorname{area}(\Delta)$ *ist* (falls $C < 0$).

c) Satz von E. Cartan (1928) und W. Ambrose (1956), (vgl. [27], S. 61 bzw. [4], S. 238 und [1]).

Vorbemerkung: Jedes auf Bogenlänge parametrisierte r-kantige (nicht notwendig geschlossene!) geodätische Polygon $c:[0,s] \to M$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M mit den „Ecken“ $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = s$ ist eindeutig bestimmt durch seine r Kantenlängen $s_i = a_i - a_{i-1} \in \mathbb{R}_+$ für $i = 1, \ldots, r$ und die durch Levi-Civita-Parallelverschiebung längs c nach dem Anfangspunkt $p := c(0) \in M$ von c zurücktransportierten Anfangsgeschwindigkeitsvektoren $v_1, \ldots, v_r \in T_pM$ seiner r Kanten, d.h.

$$\dot{c}(a_{i-1}+) = L_c\big|_{[0, a_{i-1}]}(v_i) \textit{ für } i = 1, \ldots, r \ \big(\text{vgl. } (63)\big).$$

Also kann c mit dem $(2r+1)$-Tupel $(p; v_1, \ldots, v_r; s_1, \ldots, s_r)$ identifiziert werden. Umgekehrt gibt jedes solche $(2r+1)$-Tupel, wobei $p \in M$ und $v_1, \ldots, v_r$ Einheitstangentenvektoren an M in p und $s_1, \ldots, s_r$ positive reelle Zahlen sind, Anlaß zu genau einem solchen in p startenden, r-kantigen geodätischen Polygon, wir nennen es

$$c = (p; v_1, \ldots, v_r; s_1, \ldots, s_r). \tag{64}$$

Weiter erhält man für jeden 2-dim Untervektorraum σ des Tangentialraumes an M im Anfangspunkt p des geodätischen Polygons c $\big($vgl. (64)$\big)$ durch Levi-Civita-Parallelverschiebung längs c $\big($vgl. (63)$\big)$ einen 2-dim Untervektorraum $L_c(\sigma)$ des Tangentialraumes an M im Endpunkt von c und wir bezeichnen dessen Schnittkrümmung mit

$$\lambda_r^{(M,p)}(v_1, \ldots, v_r; s_1, \ldots, s_r; \sigma) := \varkappa^M\big(L_c(\sigma)\big), \quad \textit{wobei } c \textit{ wie in } (64). \tag{65}$$

Der Satz von Cartan und Ambrose liefert nun, daß die „Gleichheit" der zuletzt eingeführten Krümmungsfunktionen $\lambda_2^{(M,p)}$ (d.h. mit $r=2$) nicht nur notwendig, sondern im einfach-zusammenhängenden, vollständigen Fall auch hinreichend für die globale Isometrie Riemannscher Mannigfaltigkeiten ist. In diesem Falle hat man also eine voll befriedigende Antwort auf das oben formulierte Problem! Genauer sagt der Satz:

Seien M, M' *zwei* n-*dim* ($n \geqq 2$) *einfach-zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten, seien* $p \in M$ *und* $p' \in M'$ *Punkte in ihnen und* $\varphi: T_pM \to T_{p'}M'$ *eine lineare Isometrie des Tangentialraumes an* M *in* p *auf den Tangentialraum an* M' *in* p'. *Gilt dann für alle Paare* (v, w) *von Einheitstangentenvektoren an* M *in* p, *für alle Paare* (ε, δ) *positiver reeller Zahlen und für alle 2-dim Untervektorräume* σ *des Tangentialraumes an* M *in* p (vgl. (65)):

$$\lambda_2^{(M,p)}(v, w; \varepsilon, \delta; \sigma) = \lambda_2^{(M',p')}\big(\varphi(v), \varphi(w); \varepsilon, \delta; \varphi(\sigma)\big),$$

so gibt es (genau) eine Isometrie $f: M \to M'$ *von* M *auf* M' *(mit* $f(p) = p'$ *und* $f_*| T_pM = \varphi$).

Schlagwortartig:

Die Übereinstimmung der Schnittkrümmungsfunktionen bei Parallelverschiebung längs 2-kantiger geodätischer Polygone ist notwendig und hinreichend für die Isometrie einfach-zusammenhängender vollständiger n-dim Riemannscher Mannigfaltigkeiten.

(ii) Das Clifford-Klein'sche Raumformenproblem

behandelt die Frage, inwiefern vollständige n-dim Riemannsche Mannigfaltigkeiten von fester konstanter Schnittkrümmung C ($\in \mathbb{R}$) [die ja alle untereinander lokal-isometrische sind (vgl. (i), a)) und „*Raumformen zur Krümmung* C" heißen] in ihrem globalen Homöomorphie- oder (affinen) Diffeomorphie-Typ bzw. Isometrie-Typ durch diese Forderung an ihre Krümmung eingeschränkt sind, sowie das weitergehende Problem einer vollständigen Klassifikation dieser Typen.

Clifford hatte 1873 eine 2-dim Riemannsche Mannigfaltigkeit von konstanter verschwindender Krümmung entdeckt, die diffeomorph zur 2-dim Torusfläche war, den sog. „flachen Clifford-Torus" in S^3 ($\subset \mathbb{E}^4$). F. Klein formulierte (im Hinblick darauf) das eben umrissene Programm im Jahre 1890.

a) Für $C = 0$, d.h. für die zum euklidischen Raum $\mathbb{E}^n$ lokal-isometrischen Raumformen M kennt man folgende Resultate (vgl. etwa [22], S. 359ff):

$n = 2$: (W. Killing, 1891): *Ist* M *kompakt, so ist* M *homöomorph zur Torusfläche oder zur Kleinschen Flasche, ist* M *nicht kompakt, so ist* M *homöomorph zu* $\mathbb{R}^2$ *oder zur Kreiszylinderfläche oder zum Möbiusband.*

$n = 3$: (W. Hantzsche und H. Wendt, 1935): *Unter den kompakten 3-dim euklidischen Raumformen gibt es sechs orientierbare und vier nicht-orientierbare Homöomorphie-Typen,* (vgl. [27], 3.5.5 u. 3.5.10). (W. Nowacki, 1935): *Unter den nicht-kompakten 3-dim euklidischen Raumformen gibt es je vier orientierbare bzw. nicht-orientierbare Homöomorphie-Typen,* (vgl. [27], 3.5.5 u. 3.5.10).

$n \geqq 4$: Die Klassifikationsaufgabe ist hier ungelöst, jedoch hat man folgende Resultate von L. Bieberbach:
Es gibt nur endlich viele kompakte (1911) *und auch nur endlich viele nicht-kompakte* (1929) *voneinander verschiedene Homöomorphie-Typen* n-*dim* ($n \geqq 2$) *euklidischer Raumformen.*

b) Für $C = 1$ (dies ist – bis auf Homothetie – der allgemeine Fall $C > 0$), d.h. für die zur Einheits-Sphäre S^n in $\mathbb{E}^{n+1}$ lokal-isometrischen Raumformen, weiß man:

n *gerade:* (H. Hopf, 1926): M *isometrisch zu* S^n *oder zu* $P^n(\mathbb{R})$ (d.i. die durch Antipoden-Identifizierung aus S^n entstandene Riemannsche Mannigfaltigkeit).

$n = 3$: (H. Seifert und W. Threlfall, 1930–1932): *Es gibt nur endlich viele Homöomorphie-Typen* 3-*dim sphärischer Raumformen.*

$n \geqq 4$: Nach Erledigung der Fälle $n \equiv 1 \bmod 4$ durch G. Vincent (1947) *löst* J. Wolf (1967) *das Isometrie-Klassifikations-Problem* für die sphärischen Raumformen beliebiger Dimension $n \geqq 4$ (vgl. [27], S. viii Z. 16 v. u. und 7.4).

(iii) Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit „reichhaltigen“ Isometriegruppen

Reichtum an Isometrien einer Riemannschen Mannigfaltigkeit auf sich (d.h. ein hoher Grad an „innerer Beweglichkeit“) muß wegen der Isometrie-Invarianz der Schnittkrümmung gewisse Regelmäßigkeiten für die Schnittkrümmung implizieren und läßt dementsprechend Einschränkungen für den Isometrie-Typ erwarten. Die hier einschlägigen Resultate sind am besten (nicht unbedingt der Chronologie ihrer Entdeckung folgend) zu erreichen von folgenden zwei Sätzen a) und b) aus:

a) *Die Isometriegruppe einer* n-*dim Riemannschen Mannigfaltigkeit ist eine Lie Gruppe, die differenzierbar auf* M *operiert und eine Dimension* $\leqq 2^{-1}(n+1)n$ *besitzt* (vgl. [15], Vol. I, S. 239). [Tritt in der letzteren Abschätzung die Gleichheit ein, so ist M von konstanter Schnittkrümmung (vgl. [15], Vol I, S. 238).]

b) *Ist eine* n-*dim Riemannsche Mannigfaltigkeit* M homogen, d.h. operiert die Isometriegruppe G *von* M *transitiv auf* M, *so ist die Isotropiegruppe* H *eines Punktes* $p \in M$ (d.i. die Gruppe aller p festlassenden Isometrien von M) *eine kompakte Untergruppe der Lie Gruppe* G (vgl. a)) *und* M *ist diffeomorph zu der Mannigfaltigkeit* G/H *der Links-Nebenklassen von* H *in* G.

Hieraus folgt insbesondere, daß die Diffeomorphie-Typen aller homogener Riemannscher Mannigfaltigkeiten, deren Isometriegruppen isomorph zu einer festen Lie Gruppe G sind, durch die Mannigfaltigkeiten G/H aufgezählt werden, wenn H ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen aller kompakten Untergruppen von G durchläuft.

Als eine gewisse Umkehrung hiervon gilt:

c) *Sei* G *eine zusammenhängende Lie Gruppe, die differenzierbar und transitiv auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit* M *operiert, so daß die Isotropiegruppe* H *eines Punktes* $p \in M$ *kompakt ist. Dann gibt es stets eine Riemannsche Metrik* g *für* M, *so daß die gegebene Operation von* G *auf* M *durch Isometrien der Riemannschen Mannigfaltigkeit* (M, g) *erfolgt* (vgl. [15], Vol. I, S. 154).

Zusatz: Besitzt G außerdem eine Riemannsche Metrik $\tilde{g}$, die biinvariant ist, d.h. bzgl. der die inneren Produkte links- und rechts-invarianter Vektorfelder auf G konstant sind (und dies ist z.B.

stets der Fall, wenn G kompakt ist!), so läßt sich die eben genannte Metrik g für M kanonisch aus $\tilde{g}$ gewinnen und die Riemannsche Schnittkrümmung von (M, g) ist stets nicht-negativ (und kann allein aus $\tilde{g}$ und algebraischen Operationen der Lie Algebra von G explizit ausgerechnet werden, vgl. [15], Vol. II, S. 203). – Unter den letztgenannten Beispielen befinden sich daher die bestbekannten Riemannschen Mannigfaltigkeiten, z. B. die projektiven Räume und die Graßmann Mannigfaltigkeiten über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

d) Eine spezielle Klasse besonders gut verstandener (und hinsichtlich Isometrie sogar vollständig klassifizierter!) homogener Riemannscher Mannigfaltigkeiten sind die *global-symmetrischen Räume* von E. Cartan (vgl. [28]), das sind Riemannsche Mannigfaltigkeiten M, bei denen es zu jedem Punkt $p \in M$ eine involutorische Isometrie von M auf sich gibt, die p als isolierten Fixpunkt besitzt. –

Unter den letzteren global-symmetrischen Räumen befinden sich auch die folgenden, in der historischen Entwicklung bedeutsamen

e) *v. Helmholtz-Lie-Raumformen*, das sind n-dim Riemannsche Mannigfaltigkeiten M, bei denen die Isometriegruppe transitiv auf der Menge aller orthonormalen n-Beine (an die Mannigfaltigkeit M) operiert.

Da die „Stellung" eines starren Körpers im Raume durch Angabe eines seiner Punkte und Angabe der Position eines mit ihm (in diesem Punkte) verbundenen orthonormalen n-Beins, eindeutig markiert werden kann, so sind die v. Helmholtz-Lie-Raumformen – mehr physikalisch gesprochen – jene Riemannschen Mannigfaltigkeiten, in denen ein starrer Körper aus einer Stellung in jede beliebige andere Stellung durch eine (globale!) Isometrie (dieser Mannigfaltigkeit auf sich) übergeführt werden kann. – Dann gilt (S. Lie, H. Weyl):

Eine n-*dim v. Helmholtz-Lie-Raumform* M $(n \geqq 2)$ *ist* (weil ihre Isometriegruppe trivialerweise auch transitiv auf dem Bündel $G_2(TM)$ aller 2-dim Untervektorräume von Tangentialräumen an M operiert) *offenbar von konstanter Schnittkrümmung* $C \in \mathbb{R}$ *und ist genauer sogar isometrisch zu einer der einfach-zusammenhängenden, vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung* (siehe oben (i), b)) *oder, falls* $C > 0$, *auch isometrisch zum* n-*dim reellen projektiven Raum, der durch Antipoden-Identifizierung aus der* n-*dim Sphäre des* $\mathbb{E}^{n+1}$ *vom Radius* $\sqrt{C^{-1}}$ *entsteht.*

(iv) Implikationen der Werteverteilung der Schnittkrümmung einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit auf deren globale Topologie oder differenzierbare Struktur

Bedeutende Resultate sind etwa seit 1900 zu der Frage erzielt worden, inwieweit das Vorzeichen (oder die Existenz gewisser Schranken für die Werte) der Schnittkrümmungsfunktion einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit deren globale topologische oder differenzierbare Struktur determiniert, und wir erwähnen von diesen folgende als eine repräsentative Auswahl:

a) J. Hadamard (1898) für $n = 2$, E. Cartan (1928) für $n \geqq 3$: *Ist* M *eine* n-*dim* $(n \geqq 2)$ *einfach-zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit* M *nicht-positiver Schnittkrümmung, so ist* M *diffeomorph zu* $\mathbb{R}^n$.

Genauer: Für jeden Punkt $p \in M$ liefert dann die Exponentialabbildung von M einen Diffeomorphismus des Tangentialraumes an M in p auf M, insbesondere sind je zwei Punkte von M durch genau eine geodätische Strecke in M verbindbar und diese ist eine Kürzeste.

b) S.B. Myers (1935): *Ist* M *eine* n-*dim* ($n \geqq 2$) *vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmung größer oder gleich einer festen positiven Zahl* $\varepsilon > 0$ *ist, so ist der Durchmesser von* M *kleiner oder gleich* $\pi\sqrt{\varepsilon^{-1}}$.

Insbesondere ist dann also M kompakt und die Fundamentalgruppe von M ist endlich, und zwar als Decktransformationsgruppe der (aus den analogen Krümmungsgründen) kompakten universellen Überlagerung von M.

c) J.L. Synge (1936): *Ist* M *eine* (2n)-*dim* ($n \geqq 1$) *kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit strikt positiver Schnittkrümmung und orientierbar (bzw. nicht-orientierbar), so ist* M *einfach-zusammenhängend (bzw. besitzt eine 2-blättrige universelle Überlagerung).*

Da die Diffeomorphietypen 2-dim kompakter differenzierbarer Mannigfaltigkeiten vollständig bekannt sind, folgt hieraus also:

Jede 2-dim kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit strikt positiver Schnittkrümmung ist diffeomorph zur 2-dim Sphäre S^2 *oder zur 2-dim reellen projektiven Ebene* $P^2(\mathbb{R})$.

d) Topologische und differenzierbare Sphärensätze: Sei M eine kompakte, einfach-zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit strikt positiver Schnittkrümmung. Betrachte für M die „Stauchungszahl“ (= „pinching-number“, engl.):

$$\delta(M) := \frac{\min \varkappa^M\big(G_2(TM)\big)}{\max \varkappa^M\big(G_2(TM)\big)} \in \,]0,1], \tag{66}$$

d.i. also der Quotient aus dem minimalen und dem maximalen aller Schnittkrümmungswerte auf M.

Daher gilt $\delta(M) = 1$ genau dann (vgl. (i), b)), wenn M isometrisch zu einer euklidischen n-dim Sphäre im (n+1)-dim euklidischen Raum $\mathbb{E}^{n+1}$ ist. – In den folgenden „Sphärensätzen“ wird untersucht, wie stark $\delta(M)$ nach unten von 1 abweichen darf, damit M wenigstens homöomorph bzw. diffeomorph zu diesen Sphären bleibt:

W. Klingenberg (1961) [nach einem wichtigen ersten Resultat von H.E. Rauch (1951)]: *Gilt unter den Voraussetzungen von* (66): $\delta(M) > \frac{1}{4}$, *so ist* M *homöomorph zur Einheitssphäre* S^n *im euklidischen Raum* $\mathbb{E}^{n+1}$.

Zusatz: Für den nicht zu S^{2n} homöomorphen komplexen projektiven Raum $P^n(\mathbb{C})$ (der reellen Dimension 2n) gilt mit der Fubini-Study-Metrik: $\delta\big(P^n(\mathbb{C})\big) = \frac{1}{4}$, d.h. die Schranke im letzten Satz ist „scharf“.

E. Ruh (1973) [nach entscheidenden Vorresultaten von D. Gromoll (1965), E. Calabi (1966), Shiohama, Tsugimoto und H. Karcher (1971)]: *Gilt unter den Voraussetzungen von* (66): $\delta(M) > \frac{4}{5}$, *so ist* M *diffeomorph zur Einheitssphäre* S^n *im euklidischen Raum* $\mathbb{E}^{n+1}$.

Zusatz: Die Schranke $\frac{4}{5}$ im letzten Satz ist vermutlich nicht „scharf“.

e) Die Diffeomorphie-Typen von vollständigen, nicht kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten nicht-negativer Schnittkrümmung:

St. Cohn-Vossen (1935/36): *Ist* M *eine 2-dim vollständige, nicht-kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit nicht-negativer Schnittkrümmung, so gilt* $\varkappa^M \equiv 0$ *(und folglich ist dann* M *isometrisch zu* $\mathbb{E}^2$, *zu einem Kreiszylinder oder zu einem Möbiusband) oder* M *ist diffeomorph zu* $\mathbb{E}^2$ *(falls* $\varkappa^M \not\equiv 0$).

Dies Resultat besitzt folgende Verallgemeinerungen für dim $M > 2$:

D. Gromoll und W. Meyer (1969): *Ist* M *eine* n-*dim* ($n \geqq 2$) *vollständige, nicht-kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit strikt positiver Schnittkrümmung, so ist* M *diffeomorph zu* $\mathbb{R}^n$, (vgl. [10]).

Läßt man im letzten Satz Krümmungswerte 0 noch zu, so verliert man i.a. die Diffeomorphie zu $\mathbb{R}^n$, es gilt aber immerhin:

J. Cheeger und D. Gromoll (1972): *Ist* M *eine* n-*dim* ($n \geqq 2$) *vollständige, nicht-kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit nicht-negativer Schnittkrümmung, so ist* M *diffeomorph zum Totalraum des Normalenbündels einer kompakten (totalgeodätischen, total-konvexen) berandeten Untermannigfaltigkeit* S *von* M, (vgl. [5], Theorem 2.2).

(v) Der Satz von Gauß-Bonnet und charakteristische Differentialformen Riemannscher und Kählerscher Mannigfaltigkeiten nach S. S. Chern

Der „Satz von Gauß-Bonnet" aus den Disquisitiones generales (vgl. oben (34)) für kleine geodätische Dreiecke einer Fläche erfährt wenig später eine merkwürdige „extrinsece" Verallgemeinerung durch

a) C. G. Jacobi (1837, vgl. [13]): *Ist ein „kleines" Dreieck aus drei wendepunktfreien Raumkurven im euklidischen Raum* $\mathbb{E}^3$ *gegeben, so daß die Hauptnormalenvektorfelder je zweier Dreiecksseiten in der ihnen gemeinsamen Ecke übereinstimmen, so begrenzt das Hauptnormalen-Bild der drei Seiten des Dreiecks eine kompakte Teilmenge auf* S^2, *deren orientierter Flächeninhalt*[30]) *gleich ist der Winkelsumme des Dreiecks vermindert um* π.

b) O. Bonnet entdeckt 1848 (vgl. [3]) folgenden Integralsatz: *Sei* N *eine* 2-*dim kompakte, einfach-zusammenhängende berandete Untermannigfaltigkeit einer* 2-*dim Fläche* M *des* $\mathbb{E}^3$ (M darf überhaupt eine beliebige 2-dim Riemannsche Mannigfaltigkeit sein). *Dann ist die Summe aus dem Integral der Gauß'schen Krümmung* K *über* N *und dem Integral der geodätischen Krümmung* $\varkappa_g$ *über die Randkurve* ∂N *gleich* 2π:

$$\int_N K d\sigma + \int_{\partial N} \varkappa_g ds = 2\pi. \tag{67}$$

Dieser Satz liefert (durch „Ecken-Rundung") folgendes allgemeineres Resultat:

c) Sei N eine einfach-zusammenhängende, offene Teilmenge einer 2-dim Riemannschen Mannigfaltigkeit M, die von einem „Polygonzug" aus r glatten Kurvenbögen C_i (Indizes $i \in \mathbb{Z}$ mod r) der Fläche M begrenzt wird, so daß der Endpunkt von C_i gleich dem Anfangspunkt von C_{i+1} ist und an dieser Polygon-Ecke der („nach N zu gelegene") Innenwinkel $\alpha_i \in [0,\pi]$ vorliegt. Dann gilt mit den zu (67) analogen Notationen:

$$\int_N K d\sigma + \sum_{i=1}^{r} \int_{C_i} \varkappa_g ds = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i + (2-r)\pi. \tag{68}$$

[30]) Zur Vorzeichenfestlegung des Flächeninhalts verwende man eine Konvention, die analog ist zu der aus (57).

Aus (68) folgt für $r = 3$, wenn C_1, C_2, C_3 geodätische Kurven der Fläche M sind, wieder die Formel (34) von Gauß. Andererseits folgt durch geeignete Zerschneidung mittels regulärer Kurven in einfach-zusammenhängende Teilbereiche und einfache Bilanzierung von Eckenwinkelsummen:

d) *Ist* M *eine* (unberandete) *kompakte, orientierte* 2-*dim Fläche im euklidischen Raum* $\mathbb{E}^3$ *vom Geschlecht* p, *so gilt:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K d\sigma = 2(1-p) = \chi(M) \ (:= \text{Euler-Poincaré-}\textit{Charakteristik von } M.) \qquad (69)$$

Die von Gauß eingeführte Totalkrümmung von ganz M ist daher (nicht nur eine Isometrie-Invariante, was Gauß schon seit 1816 wußte und in den Disquisitiones generales bewiesen hatte, sondern) sogar eine topologische Invariante der kompakten orientierbaren Fläche M, insbesondere also unabhängig von der speziellen differenzierbaren Einbettung von M in $\mathbb{E}^3$!

H. Hopf deutete 1925 (vgl. [11]) das Integral von (69) als:

$$\frac{1}{4\pi}\int_M K d\sigma = \textit{Brouwerscher Abbildungsgrad der sphärischen Abb. von } M$$

(vgl. (7)) und berechnete letzteren Abbildungsgrad für beliebige kompakte orientierte unberandete Hyperflächen M des $\mathbb{E}^{n+1}$ rein topologisch (unter Benutzung des Satzes von Poincaré, wonach die Summe der Indizes eines tangentialen Vektorfeldes auf M mit nur endlich vielen Nullstellen gleich $\chi(M)$ ist) zum Wert $\frac{1}{2}\chi(M)$. Damit war ein Beweis für (69) gegeben, der Modellcharakter für die weitere Entwicklung bekommen sollte!

e) Im Jahre 1940 entdecken C. B. Allendoerfer und W. Fenchel unabhängig voneinander ein Analogon zur Formel (69) für eine beliebige n-dim ($n \geqq 2$) kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit M, welche eine isometrische Einbettung in einen euklidischen Raum $\mathbb{E}^{n+k}$ (beliebiger Codimension k) gestattet. Letztere Bedingung ist, wie wir heute, nach dem Einbettungssatz von J. Nash (1956, vgl. [19]) wissen, de facto keine Einschränkung für M, aber die angegebenen Beweise dieses allein im Rahmen der Inneren Differentialgeometrie von M formulierbaren Satzes enthielten extrinsece Komponenten, d. h. explizite Nutzungen der Einbettung von M in $\mathbb{E}^{n+k}$. –

Völlig im Rahmen der „Inneren Differentialgeometrie“ beweist erstmalig

S. S. Chern (1944, [6]): *Ist* M *eine* n-*dim unberandete kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, so gibt es eine universelle und, allein mit Hilfe des Riemannschen Krümmungstensors von* M *zu berechnende Differentialform* Ω n-*ten Grades auf* M, *die sogenannte Euler-Form* Ω, *und für diese gilt der sog. allgemeine „Satz von Gauß-Bonnet“:*

$$\int_M \Omega = \chi(M). \qquad (70)$$

Bemerkung: S. S. Chern benutzt für seinen Beweis ein differenzierbares Einheitsvektorfeld E auf $M \setminus \{p\}$, d. h. dies Vektorfeld E besitzt nur eine Singularität $p \in M$, und es definiert in kanonischer Weise eine stetige Abbildung f der (n-1)-dim Sphäre aller Einheitsvektoren an M in p auf sich, deren Abbildungsgrad einerseits nach Poincaré-Hopf gleich der Eulerschen Charakteristik $\chi(M)$ ist. Daß andererseits dieser Abbildungsgrad auch gleich ist dem in (70) links auftretenden Integral, kann Chern (wegen des Fehlens der „extrinsecen" Gauß'schen sphärischen Abbildung!) nicht wie H. Hopf zeigen, sondern er beweist dies durch eine völlig neuartige geometrische Integration (mittels Kronecker's Integralformel).

In diesem Zusammenhang muß besonders erwähnt werden: Der von S.S. Chern in [6] als „intrinsec" angekündigte Beweis von (70) hat der „Inneren Differentialgeometrie" einen neuen Horizont eröffnet:

Wurde bis dahin als „Innere Differentialgeometrie von M" die Geometrie der Riemannschen Mannigfaltigkeit M verstanden, die allein „in M" operiert, so ist dies hier im engeren Sinne nicht mehr zutreffend: Der Beweis von S.S. Chern involviert neben M noch weitere Mannigfaltigkeiten und Differentialformen auf letzteren sowie differenzierbare Abbildungen von M (bzw. Einbettungen von $M\setminus\{p\}$ mit $p\in M$) in diese: Jedoch „entwachsen" diese (hier außer M benutzten) Mannigfaltigkeiten, z.B. das Einheits-Tangentialbündel von M oder das Bündel der orthonormalen n-Beine und die von dorther herangezogenen Differentialformen, in natürlicher Weise allein der Riemannschen Mannigfaltigkeit M (frei nach H. Weyl: „Wie sich eine Schnecke ihr Haus allein baut"). Diese höher-dimensionalen intrinsec konstruierten Bündelmannigfaltigkeiten „über M" übernehmen hier in S.S. Chern's Beweis (wie ein Vergleich mit dem oben zitierten Beweis von H. Hopf für (69) lehrt) die Rolle eines „Substituts" für den fehlenden umgebenden euklidischen Raum, eine Idee, die die Denkweise und Methode der neueren „Inneren Differentialgeometrie" seither entscheidend mitgeprägt hat.

f) Wegen (70) bzw. (69) kann eine Riemannsche Metrik auf einer kompakten orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit keine völlig „beliebige" Schnittkrümmungsfunktion besitzen, z.B.: Nach (69) muß jede Riemannsche Metrik auf der 2-dim Sphäre S^2 eine Gauß'sche Krümmungsfunktion besitzen, die auch positive Werte annimmt (damit das Integral in (69) den Wert $\chi(S^2)=2>0$ haben kann). Die Frage, ob oder wann eine vorgegebene Funktion K auf einer 2-dim differenzierbaren Mannigfaltigkeit M als Gauß'sche Krümmung einer Riemannschen Metrik für M realisiert werden kann (und eine analoge für höhere Dimensionen) ist in jüngster Zeit erfolgreich behandelt worden, insbesondere von J. Kazdan und F. Warner (1973/1974), sowie von H. Gluck (1971/74), vgl. dazu den Überblicksartikel [8] mit seiner ausführlichen Bibliographie.

g) Für eine kompakte, orientierte Fläche M des $\mathbb{E}^3$ war die intrinsece Euler-Form Ω (deren Integral über M eine topologische Invariante von M lieferte, vgl. (70)), wie der Vergleich mit (69), (58) zeigt, (bis auf einen universellen konstanten Faktor) gerade die mittels der Gauß'schen sphärischen Abbildung $\zeta{:}M\to S^2$ (vgl. (7)) zurückgeholte Flächeninhaltsform σ_2 von S^2, die eine geschlossene Differentialform 2-ten Grades auf S^2 ist.

Eine analoge extrinsece Konstruktion führt auch bei höherdimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten M zu neuen intrinsecen, zu den sog. *„charakteristischen Differentialformen von M":*

Sei nun M eine n-dim kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, die eine isometrische Einbettung $f{:}M\to\mathbb{E}^{n+k}$ gestattet (und zufolge dem bekannten Einbettungssatz von J. Nash aus dem Jahre 1956 (vgl. [19]) existiert z.B. für $k\geqq\frac{1}{2}(n+1)n(3n+11)$ stets eine solche Einbettung). Dann hat man nach H. Whitney folgende Verallgemeinerung von Gauß' sphärischer Abbildung, nämlich die *„Whitney-Abbildung* W *durch parallele Tangenten"*, die jedem $p\in M$ den parallel zum Ursprung des $\mathbb{E}^{n+k}$ verschobenen Bild-Tangentialraum von M in p (unter der Einbettung f) als einen n-dim Untervektorraum W(p) von $\mathbb{E}^{n+k}$ zuordnet. So wird W zu einer differenzierbaren Abbildung von M in die Graßmann-Mannigfaltigkeit aller n-dim Untervektorräume des E^{n+k}, die in kanonischer Weise eine homogene Riemannsche Mannigfaltigkeit $\left(=O(n+k)/O(n)\times O(k)\right)$ ist und auf der gewisse geschlossene Standard-Differentialformen (von durch 4 teilbaren Graden) existieren. Holt man diese mittels W auf M zurück, so erhält man sog. „charakteristische Differentialformen von M“, die sog. *„Pontrjagin-Formen von* M“. Diese hängen wieder nicht von der speziellen isometrischen Einbettung f von M in einen euklidischen Raum ab, und sind allein mittels des Riemannschen Krümmungstensors von M zu berechnen, ja, ihre de Rham-Cohomologie-Klassen (d.s. die sog. Pontrjaginschen Klassen von M) sind sogar unabhängig von der Riemannschen Metrik von M und erweisen sich als *Invarianten der* M zugrundeliegenden *differenzierbaren Mannigfaltigkeit!* Für n-$\dim_{\mathbb{C}}$ Kählersche Mannigfaltigkeiten M kann man analog die sog. *„Chern-Formen“* als gewisse geschlossene Differentialformen der Grade 2,4,...,2n wieder intrinsec allein aus dem Riemannschen Krümmungstensor von M konstruieren und deren de Rham-Cohomologie-Klassen sind sogar ganzzahlig und *Invarianten* allein *der* M zugrundeliegenden *topologischen Mannigfaltigkeit!* Diese differentialgeometrisch berechenbaren charakteristischen Cohomologieklassen Riemannscher bzw. Kählerscher Mannigfaltigkeiten sind zu einem bedeutenden Instrument der Verbindung von Differentialgeometrie und Topologie geworden.

(vi) **Winkelvergleichssätze:**

In den Disquisitiones generales hatte Gauß bereits (siehe oben (35)) einen infinitesimalen Winkelvergleichssatz für kleine geodätische Dreiecke in einer Fläche des $\mathbb{E}^3$ („verglichen“ mit einem ebenen euklidischen Dreieck gleicher Seitenlängen) angegeben.

Globale Winkelvergleichssätze zwischen geodätischen Dreiecken von Riemannschen Mannigfaltigkeiten, deren Schnittkrümmungswerte oberhalb oder unterhalb fester Schranken liegen, haben sich als ein fundamentales, äußerst wirkungsvolles Werkzeug der globalen Differentialgeometrie erwiesen. Aus dem Vorrat der hier vorhandenen Sätze, zu dem vor allem A.D. Alexandroff und W.A. Toponogoff beigetragen haben, zitieren wir hier nur einen einfachen, aber besonders einprägsamen (für subtilere Versionen vgl. z.B. [5], Theorem 1.1 oder [14]):

W. A. Toponogoff (1958): *Sei* M *eine* n-*dim* ($n\geqq 2$) *vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmungsfunktion* $\varkappa^M$ *nur Werte* $\geqq C(\in\mathbb{R})$ *annimmt.* M_C^2 *bezeichne „die“ 2-dimensionale einfach-zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der konstanten Schnittkrümmung* C (vgl. (i), b)), *die als „Vergleichs-Ebene“ benutzt wird: Sei* Δ *ein Kürzesten-Dreieck in* M *mit den Seitenlängen* a, b, c *und den (diesen Seiten gegenüberliegenden) Winkeln* α,β,γ. *Dann existiert ein geodätisches Dreieck* Δ_C *in* M_C^2 *mit den gleichen Seitenlängen wie* Δ, *und* *darüber hinaus gestatten dessen korrespondierende Winkel* $\alpha_C, \beta_C, \gamma_C$ *folgenden „Vergleich" mit denen von* Δ:

$$\alpha_C \leqq \alpha, \quad \beta_C \leqq \beta, \quad \gamma_C \leqq \gamma.$$

Dieser Überblick ist ohne Zweifel eine sehr unvollständige (und womöglich auch recht willkürlich erscheinende) Auswahl aus der gesamten Leistung der Differentialgeometrie der letzten 150 Jahre (und sollte insbesondere keine „Wichtung" von Resultaten beinhalten): Hochinteressante Fragen über Geodätische (ihre Kürzesten-Eigenschaften im Kleinen und Großen, konjugierte Punkte, Schnittort, ..., Existenz geschlossener geodätischer Linien), Fragen über Minimalflächen (Plateau'sches Problem und zugehörige Regularitätsfragen, Bernstein's Satz und seine höherdimensionalen Analoga, ...) sowie allgemeiner über sog. „harmonische Abbildungen" von Riemannschen Mannigfaltigkeiten, schließlich auch alle Fragen zur Gestalt, Starrheit oder Verbiegbarkeit von Untermannigfaltigkeiten in Riemannschen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung mußten hier (im Vortrag!) aus Zeitgründen unerwähnt bleiben, obschon es gerade zu diesen Themenkreisen nicht nur zahlreiche, sondern gerade auch inhaltlich äußerst eindrucksvolle Resultate gibt!

Die Absicht dieser Auswahl war es aber, „klassische" und zugleich wieder auch „lebendige" fundamentale Themen der Differentialgeometrie vorzustellen, welche (möglichst auch den Nicht-Differentialgeometer) erkennen lassen, wie tief einerseits die Differentialgeometrie in den von Gauß entdeckten Begriffen, Resultaten und Themenkreisen (aus den Disquisitiones generales) immer noch verwurzelt ist, wie kräftig andererseits aber auch das Wachstum und die Entwicklung dieser (dort zum Teil nur keimhaft angelegten) Ideen bereits vorangeschritten ist.

Als mir (anläßlich dieses Vortrags!) das volle Ausmaß und die Nachhaltigkeit dieser Wirkung der Disquisitiones generales auf den Gang der Differentialgeometrie (erstmalig!) deutlich klar geworden war, fiel mir die kurze Rede von Heinz Hopf ein, die er auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß 1958 in Edinburgh als damaliger Vorsitzender des Fields-Medaillen-Komittees gehalten hat und in der er u. a. ausführte (vgl. [12], S. liii, Z. 2 v. u.):

„The great variety within mathematics is due not only to the multiplicity of the branches of mathematics, but also to the diversity of the general tasks that face a mathematician in any branch. A task which is particularly fundamental, is: *to solve old problems;* and another, no less fundamental, is:

to open the way to new developments."

Nur wenige mathematische Arbeiten dürften dieser letztgenannten Aufgabe in dem Maße gerecht geworden sein wie die „Disquisitiones generales circa superficies curvas" von Carl Friedrich Gauß, die – wie ich meine – vor allem deshalb ein „Prachtstück" der mathematischen Literatur bleiben werden!

Literatur

Im Manuskript wird die von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebene und im Verlag B. G. Teubner (Leipzig) bzw. J. Springer (Berlin) erschienene mehrbändige Sammlung:

„Carl Friedrich Gauß, Werke“ unter der Abkürzung „G.W.“

zitiert (mit der Nummer des jeweils benutzten Bandes (unterstrichen) dahinter!).

[1] W. Ambrose: Parallel translation of Riemannian curvature, Ann. of Math. 64 (1956), 337–363.

[2] W. Blaschke und K. Leichtweiß: Elementare Differentialgeometrie, 5-te Aufl., Springer, Berlin 1973.

[3] O. Bonnet: Journ. de l'École Polytechnique 19 (1848), 131 ff.

[4] E. Cartan: Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, 2nd ed., Gauthier-Villars, Paris 1951.

[5] J. Cheeger and D. Gromoll: On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature, Ann. of Math. 96 (1972), 413–433.

[6] S. S. Chern: A simple intrinsec proof of the Gauß-Bonnet formula for closed riemannian manifolds, Ann. of Math. 45 (1944), 747–752.

[7] L. Euler: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Lausanne, 1744.

[8] H. Gluck: Manifolds with preassigned curvature – a survey, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 313–329.

[9] D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer: Riemannsche Geometrie im Großen, Lecture Notes in Math. 55, Springer, Berlin, 1968.

[10] D. Gromoll and W. Meyer: On complete open manifolds of positive curvature, Ann. of Math. 90 (1969), 75–90.

[11] H. Hopf: Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen, Math. Ann. 95 (1925), 313–399.

[12] H. Hopf: Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1958, Cambridge University Press, 1960.

[13] C. G. Jacobi: Demonstratio et amplificatio nova Gaussiani de quadratura integra trianguli in data superficie e lineis brevissimis formati, Crelle Journ. 16 (1837), 344–350.

[14] H. Karcher: Anwendungen der Alexandrowschen Winkelvergleichssätze, manuscripta math. 2 (1970), 77–102.

[15] S. Kobayashi and K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry, Vol. I (1963), Vol. II (1969), Wiley, New York.

[16] J. L. Lagrange: Nouvelle Solution du Problème du Mouvement de Rotation corps de figure quelconque, Oeuvres des Lagrange, III, 572–616, Gauthier-Villars, Paris.

[17] A. M. Legendre: Elements de Geometrie, 12me ed., Paris, 1823. Die Erst-Publikation dieses Resultats findet sich in: „Histoire de l'Académie royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et Physique“, Paris 1787, p. 338.

[18] F. Minding: Bemerkung über die Abwicklung krummer Linien von Flächen, Crelle Journ. 6 (1830), 159–161.

[19] J. Nash: The imbedding problem for Riemannian manifolds, Ann. of Math. 63 (1956), 20–63.

[20] I. Newton: Opuscula mathematica, rec. I, Castillioneus, Vol. 1, Lausanne und Genf, 1744.

[21] B. Riemann: Gesammelte Mathematische Werke, 2-te Aufl., Leipzig, Teubner, 1892.

[22] W. Rinow: Die innere Geometrie der metrischen Räume, Springer, Berlin, 1961.

[23] H. Salié: Daten aus dem Leben und Wirken von Carl Friedrich Gauß, C.F. Gauß Gedenkband anläßlich des 100. Todestages am 23. Februar 1955, Teubner, Leipzig 1957, 15–36.
[24] P. Stäckel: Gauß als Geometer, G.W. 10,2, Abhandlung 4, 1–123.
[25] A. Wangerin: „Allgemeine Flächentheorie von C.F. Gauß". Deutsche Übersetzung (mit Anmerkungen) der „Disquisitiones generales circa superficies curvas", Ostwalds's Klassiker der Exakten Wissenschaften Nr. 5, 5-te Aufl., Akad. Verlagsgesellschaft m.b.H., Leipzig, 1921.
[26] J. Weingarten: Über die Eigenschaften des Linienelements der Flächen von constantem Krümmungsmaß, Crelle Journ. 94 (1883), 181–202.
[27] J. Wolf: Spaces of constant curvature, McGraw-Hill, New York, 1967.
[28] S. Helgason: Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1962.